Pág. 9

1.1.1. $\lim (u_n) = \lim \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 - 0^+ = 2^-$

1.1.2. $\lim (v_n) = \lim \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 + 0^+ = 2^+$

1.1.3. $\lim (w_n) = \lim \left(\frac{3n-1}{n+2}\right) = \lim \left(\frac{3(n+2)-7}{n+2}\right) =$

$= \lim \left(3 - \frac{7}{n+2}\right) = 3 - 0^+ = 3^-$

1.1.4. $\lim (t_n) = \lim \left(\frac{n-1}{n^2}\right) = \lim \left(\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2}\right) = \lim \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{n}\right) =$

$= \frac{1-0}{+\infty} = 0^+$

1.2.1. P. ex., $a_n = 4 + \frac{1}{n}$ **1.2.2.** P. ex., $a_n = \frac{1}{n}$

1.2.3. P. ex., $a_n = 5 - \frac{1}{n}$ **1.2.4.** P. ex., $a_n = -2 - \frac{1}{n^2}$

Pág. 10

Tarefa 1

1.1. $\lim (v_n) = \lim (-2n) = -\infty$ e

$\lim (f(v_n)) = \lim \left(-3 + \frac{1}{v_n - 2}\right) = -3 + \frac{1}{-\infty} = -3 + 0 = -3$

1.2. $\lim (w_n) = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 + 0^+ = 2^+$ e

$\lim (f(w_n)) = \lim \left(-3 + \frac{1}{w_n - 2}\right) = -3 + \frac{1}{0^+} = -3 + (+\infty) = +\infty$

1.3. $\lim (t_n) = \lim \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 - 0^+ = 2^-$ e

$\lim (f(t_n)) = \lim \left(-3 + \frac{1}{t_n - 2}\right) = -3 + \frac{1}{0^-} = -3 + (-\infty) = -\infty$

2.1. Existe. $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5$

2.2. Não existe $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ porque $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} g(x)$.

$\lim\limits_{x \to 4^-} g(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x) = 1$

2.3.1. $\lim (u_n) = \lim \left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4 + 0^+ = 4^+$, logo $\lim (g(u_n)) = 1$.

2.3.2. $\lim (u_n) = \lim \left(4 - \frac{1}{n^2}\right) = 4 - 0^+ = 4^-$, logo $\lim (g(u_n)) = 2$.

3.1. Como $\lim (u_n) = +\infty$, então

$\lim (h(u_n)) = \lim (2u_n - 1) = +\infty$.

3.2. Como $\lim (v_n) = 2^-$, então

$\lim (h(v_n)) = \lim \left(\frac{1}{v_n - 2}\right) = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

3.3. Como $\lim (w_n) = 2^+$, então

$\lim (h(w_n)) = \lim (2w_n - 1) = 2 \times 2 - 1 = 3$.

3.4. Como $\lim (s_n) = -\infty$, então

$\lim (h(s_n)) = \lim \left(\frac{1}{s_n - 2}\right) = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Pág. 11

2.1.1. $\lim (a_n) = \lim \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3 + 0^+ = 3^+$, logo

$g(a_n) = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{\frac{3n+2}{n}} = \frac{n}{3n+2}$.

2.1.2. $\lim (b_n) = \lim \left(\frac{3n-5}{n}\right) = \lim \left(3 - \frac{5}{n}\right) = 3 - 0^+ = 3^-$, logo

$g(b_n) = b_n + 1 = 3 - \frac{5}{n} + 1 = 4 - \frac{5}{n}$

2.2.1. $\lim (g(a_n)) = \lim \left(\frac{n}{3n+2}\right) = \lim \left(\frac{1}{3 + \frac{2}{n}}\right) = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$

2.2.2. $\lim (g(b_n)) = \lim \left(4 - \frac{5}{n}\right) = 4 - 0 = 4$

3. A afirmação **I** é verdadeira.

$2 - \frac{1}{n} < 2, \forall n \in \mathbb{N}$, logo $h\left(2 - \frac{1}{n}\right) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

A afirmação **II** é falsa.

$2 + \frac{5}{n} > 2, \forall n \in \mathbb{N}$, logo $h\left(2 + \frac{5}{n}\right) \leqslant -1, \forall n \in \mathbb{N}$.

A afirmação **III** é verdadeira.

$2 \leqslant 3 - \frac{1}{n^2} < 3, \forall n \in \mathbb{N}$, logo $h\left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = -1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pág. 12

4.1. Como $\lim (u_n) = 0^+$, então $\lim (f(u_n)) = 2$.

4.2. Como $\lim (u_n) = 0^-$, então $\lim (f(u_n)) = -\infty$.

4.3. Como $\lim (u_n) = +\infty$, então $\lim (f(u_n)) = 0$.

4.4. Como $\lim (u_n) = -\infty$, então $\lim (f(u_n)) = 1$.

5.1. Se $\lim g(u_n) = 1$, então $\lim (u_n) = 3^-$.

O termo geral de (u_n) pode ser $u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$.

A opção correta é a **(C)**.

5.2. $\lim (g(e^{-n} - 2)) = -\infty$ porque $\lim (e^{-n} - 2) = -2^+$.

Pág. 13

6.1.1. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$ **6.1.2.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

6.1.3. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$ **6.1.4.** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0$

6.2. A afirmação é verdadeira.

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$, então existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e é igual a 2.

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, então não existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

7.1. $\lim (w_n) = \lim \left(a + \frac{1}{n}\right) = a + 0^+ = a^+$

Se $\lim g(w_n) = +\infty$, então $\lim (w_n) = -1^+$.

Assim sendo, conclui-se que $a = -1$.

7.2. Se $\lim g(w_n) = -\infty$, então $\lim (w_n) = 2^+$.

Assim sendo, conclui-se que $a = 2$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 14

8.1. Por exemplo, $a = 3$. **8.2.** $a = -3$ **8.3.** $a = 6$

9.1. Seja (u_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de f tal que $\lim (u_n) = 3$.

$f(u_n) = u_n + \frac{1}{u_n}$

$\lim f(u_n) = \lim \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{10}{3}$.

9.2. Seja (u_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de f tal que $\lim (u_n) = +\infty$.

$f(u_n) = u_n + \frac{1}{u_n}$

$\lim f(u_n) = \lim \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) = +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

9.3. Seja (u_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de f tal que $\lim (u_n) = 0$ e $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$f(u_n) = u_n + \frac{1}{u_n}$

$\lim f(u_n) = \lim \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) = 0 + \frac{1}{0^-} = 0 + (-\infty) = -\infty$

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

10.1. Seja (u_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de h tal que $\lim (u_n) = -4$.

$h(u_n) = \frac{1}{u_n - 2}$

$\lim h(u_n) = \lim \left(\frac{1}{u_n - 2}\right) = \frac{1}{\lim (u_n - 2)} = \frac{1}{-4-2} = -\frac{1}{6}$

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to -4} h(x) = -\frac{1}{6}$.

10.2. Seja (u_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de h tal que $\lim (u_n) = 1$ e $u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$h(u_n) = \frac{1}{u_n - 2}$

$\lim h(u_n) = \lim \left(\frac{1}{u_n - 2}\right) = \frac{1}{\lim (u_n - 2)} = \frac{1}{1-2} = -1$

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -1$.

Seja (v_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de h tal que $\lim (v_n) = 1$ e $u_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$h(u_n) = 2u_n - 3$

$\lim h(u_n) = \lim (2u_n - 3) = 2 \times 1 - 3 = -1$.

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = -1$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = -1$, então $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = -1$.

10.3. Seja (u_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de h tal que $\lim (u_n) = -\infty$.

$h(u_n) = \frac{1}{u_n - 2}$

$\lim h(u_n) = \lim \left(\frac{1}{u_n - 2}\right) = \frac{1}{\lim (u_n - 2)} = \frac{1}{-\infty - 2} = 0$

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

Pág. 15

Tarefa 2

1.1.1. Por observação gráfica, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

1.1.2. Por observação gráfica, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$.

1.2.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$	$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$	
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) + \lim\limits_{x \to 2} g(x) = \mathbf{4} + \mathbf{1} = \mathbf{5}$		$\lim\limits_{x \to 2} (f+g)(x) = \mathbf{5}$
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \times \lim\limits_{x \to 2} g(x) = \mathbf{4} \times \mathbf{1} = \mathbf{4}$		$\lim\limits_{x \to 2} (f \times g)(x) = \mathbf{4}$
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) - \lim\limits_{x \to 2} g(x) = \mathbf{4} - \mathbf{1} = \mathbf{3}$		$\lim\limits_{x \to 2} (f-g)(x) = \mathbf{3}$
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) : \lim\limits_{x \to 2} g(x) = \mathbf{4} : \mathbf{1} = \mathbf{4}$		$\lim\limits_{x \to 2} (f : g)(x) = \mathbf{4}$

Pág. 16

11.1. $\lim\limits_{x \to 3} (h+j)(x) = \lim\limits_{x \to 3} h(x) + \lim\limits_{x \to 3} j(x) = 2 + 0 = 2$

11.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (h \times j)(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) \times \lim\limits_{x \to -\infty} j(x) = -2 \times 4 = -8$

11.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{h}{j}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} j(x)} = \frac{3}{-1} = -3$

11.4. $\lim\limits_{x \to 0} (h(x))^2 = \left(\lim\limits_{x \to 0} h(x)\right)^2 = (-1)^2 = 1$

11.5. $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{j(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 1^-} j(x)} = \sqrt{4} = 2$

11.6. $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{(h+j)(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 1^+} (h+j)(x)} =$

$= \sqrt{\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) + \lim\limits_{x \to 1^+} j(x)} = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$

12.1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

12.2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

12.3. $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-3^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

12.4. $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = \frac{2+1}{4-(2^-)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

12.5. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+1}{4-x^2} = \frac{2+1}{4-(2^+)^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

12.6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{+\infty - 1} = \frac{4}{+\infty} = 0$

Pág. 17

13.1. $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = \lim\limits_{x \to -4} (x^2+1) = (-4)^2 + 1 = 17$

13.2. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+1) = (-1)^2 + 1 = 2$ e

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{1} = 2$, logo $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

13.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+1) = (-\infty)^2 + 1 = +\infty$

13.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{+\infty} = 0$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$

15.1. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3} & \text{se } x-3>0 \\ \dfrac{-(x-3)}{x-3} & \text{se } x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>3 \\ -1 & \text{se } x<3 \end{cases}$

15.2. $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (-1) = -1$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (1) = 1$.

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ porque $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$.

16.1. $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x}{x^2+2x-3} = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$

16.2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x^2+2x-3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

16.3. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-4}{8-x^3} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

Pág. 18

17.1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

17.2. $\lim\limits_{x\to -2^-} \left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)}{\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)} = \dfrac{a}{0^+} = -\infty$, sendo a um número real negativo.

17.3. $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)} = \dfrac{b}{0^-} = +\infty$, sendo b um número real negativo.

17.4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)} = \dfrac{-4}{+\infty} = 0$

Pág. 19

18.1. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1} g(x)}{\lim\limits_{x\to 1} f(x)} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

18.2. Não existe $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, porque

$\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = -\infty$.

19.1.1. $f(-3) = \dfrac{9-(-3)^2}{-3+3} = \dfrac{0}{0}$, logo -3 é um zero comum ao numerador e denominador da fração.

19.1.2. $f(x) = \dfrac{9-x^2}{x+3} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{x+3} = 3-x,\ \forall x \in D_f$

19.2. $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} (3-x) = 3-(-3) = 6$

20.1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{8-2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x+4)}{-2(x-4)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{4+4}{-2} = -4$

20.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^4-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1+2}{(1+1)\times(1^2+1)} = \dfrac{3}{4}$

Cálculo auxiliar

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$

21.1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{g(x)}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{(x-3)(x+3)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{3+2}{3+3} = \dfrac{5}{6}$

Cálculo auxiliar

$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$

21.2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{f(x)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{2x^3-x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(2x^2-2x+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{2x^2-2x+1} = \dfrac{-1}{2+2+1} = -\dfrac{1}{5}$

Cálculo auxiliar

	2	0	−1	1
−1		−2	2	1
	2	−2	1	0

$2x^3-x+1 = (x+1)(2x^2-2x+1)$

Pág. 20

22.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-1)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

22.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{1-x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{1+1}{-1} = -2$

22.3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^2+3x-2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)(x-2)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} (-x+2) = -1+2 = 1$

Cálculo auxiliar

$-x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$

22.4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{-x(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1}{-x} = \dfrac{1+1+1}{-1} = -3$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

22.5. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

Cálculo auxiliar

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-1$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

23.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}:\ x \geqslant 0 \wedge x - 9 \neq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{9\}$

23.2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \dfrac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \dfrac{(\sqrt{x})^2 - 3^2}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} =$

$= \dfrac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3}\ ,\ \forall\, x \in D_f$

23.3. $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = \lim\limits_{x \to 9} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3} = \dfrac{1}{\sqrt{9} + 3} = \dfrac{1}{6}$

24.1. $D_g = \{x \in \mathbb{R}:\ x + 3 \geqslant 0 \wedge \sqrt{x + 3} - 2 \neq 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}:\ x \geqslant -3 \ \wedge\ x \neq 1\} = [-3\ ,\ +\infty[\setminus \{1\}$

24.2. $g(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2} = \dfrac{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)}{(\sqrt{x + 3} - 2)(\sqrt{x + 3} + 2)} =$

$= \dfrac{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)}{(\sqrt{x + 3})^2 - 2^2} = \dfrac{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)}{x + 3 - 4} =$

$= \sqrt{x + 3} + 2\ ,\ \forall\, x \in D_g$

24.3. $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x + 3} + 2) = \sqrt{1 + 3} + 2 = 4$

25.1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt{x} - 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} =$

$= \dfrac{1}{(1 + 1) \times (\sqrt{1} + 1)} = \dfrac{1}{4}$

25.2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{1 - \sqrt{x + 3}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(1 + \sqrt{x + 3})}{(1 - \sqrt{x + 3})(1 + \sqrt{x + 3})} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(1 + \sqrt{x + 3})}{1 - (x + 3)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(1 + \sqrt{x + 3})}{-x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(1 + \sqrt{x + 3})}{-(x + 2)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1 + \sqrt{x + 3}}{-1} = \dfrac{2}{-1} = -2$

Pág. 21

26.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - x^2 + 3x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^3\left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)\right] =$

$= +\infty\,(2 - 0 + 0) = +\infty$

26.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 - 2x^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x^3\left(-1 - \dfrac{2}{x}\right)\right] =$

$= -\infty\,(-1 - 0) = +\infty$

26.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x} = \sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\right]} =$

$= \sqrt{+\infty\,(1 - 0)} = +\infty$

Pág. 22

27.1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 + x) \overset{+\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2) = +\infty$

27.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 2x^3 + 1) \overset{-\infty + \infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4) = -\infty$

27.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x^3}{4} + 2x + 2\right) \overset{-\infty + \infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x^3}{4}\right) = -\infty$

27.4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + \dfrac{x^5}{3}\right) \overset{+\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^5}{3}\right) = -\infty$

27.5. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x(x + 1)}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1 - 1}{x(x + 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x(x + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{0 + 1} = 1$

27.6. $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{1 - x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{(1 - x)(1 + x)}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1 + x - 1}{(1 - x)(1 + x)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{(1 - x)(1 + x)} = \dfrac{1}{0^- \times 2} =$

$= -\infty$

Pág. 23

28.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x}) \overset{\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{1 + \sqrt{\dfrac{1}{x}}} = \dfrac{+\infty\,(1 - 0)}{1 + 0} = +\infty$

28.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \overset{\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

28.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 5}) \overset{\infty - \infty}{=}$

$\overset{\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 5})(\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 5})}{\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 5}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 5 - (x - 5)}{\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 5}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10}{\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 5}} =$

$= \dfrac{10}{+\infty} = 0$

29.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3x^4 + 1}{x^3 + 5x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^4\left(-\dfrac{2}{3x^3} + 1 - \dfrac{1}{3x^4}\right)}{x^3\left(1 + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x\left(-\dfrac{2}{3x^3} + 1 - \dfrac{1}{3x^4}\right)}{1 + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}} = \dfrac{-\infty\,(0 + 1 - 0)}{1 + 0 - 0} = -\infty$

29.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 5x - 3}{x^4 + x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3\left(1 + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(1 + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}}{x\left(1 + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)} = \dfrac{1 + 0 - 0}{-\infty\,(1 + 0 + 0)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 24

30.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{3x^2-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

30.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x^3+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

30.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x^5}{2x^4-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^5}{2x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$

30.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

30.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)=-1$

30.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2|\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\times\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty\left(\sqrt{1+0}\right)=+\infty$

30.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2|\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\times\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-\infty\left(\sqrt{1+0}\right)=-\infty$

31.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\,x^n}{1-2x^2}=-2$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\,x^n}{-2x^2}=-2$

Se $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$, então tem-se:

$n=2\wedge\dfrac{a}{-2}=-2\Leftrightarrow n=2\wedge a=4$.

31.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\,x^n}{1-2x^2}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\,x^n}{-2x^2}=0$

Se $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, então tem-se:

$n<2\wedge a\neq0\Leftrightarrow n=1\ \wedge\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

31.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\,x^n}{1-2x^2}=-\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\,x^n}{-2x^2}=-\infty$

Se $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, então tem-se:

$n>2\wedge\dfrac{a}{-2}<0\Leftrightarrow n>2\wedge a>0$.

32.1. Por exemplo, $f(x)=x-1$ e $g(x)=x^2$.

32.2. Por exemplo, $f(x)=-x^2+x-5$ e $g(x)=2x^2-4$.

32.3. Por exemplo, $f(x)=x^4-3x+1$ e $g(x)=x^2-1$.

Pág. 25

33.1. $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\times\dfrac{1}{2x}\right)\overset{0\times\infty}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{2x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{2}\right)=0$

33.2. $\lim\limits_{x\to1}\left((x-1)\times\dfrac{1}{x-x^2}\right)\overset{0\times\infty}{=}\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-1}{x-x^2}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-1}{-x(x-1)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{-x}\right)=-1$

33.3. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-x}\times x\right)\overset{0\times\infty}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}-x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x\left(\sqrt{x}+x\right)}{\left(\sqrt{x}-x\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x\left(\sqrt{x}+x\right)}{x-x^2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x\left(\sqrt{x}+x\right)}{x(1-x)}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}+x}{1-x}\right)=\dfrac{0}{1}=0$

33.4. $\lim\limits_{x\to3^+}\left(\dfrac{1}{-x^2+6x-9}\times(x-3)\right)\overset{0\times\infty}{=}\lim\limits_{x\to3^+}\left(\dfrac{x-3}{-x^2+6x-9}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to3^+}\left(\dfrac{x-3}{-(x-3)^2}\right)=\lim\limits_{x\to3^+}\left(\dfrac{1}{-(x-3)}\right)=-\infty$

Pág. 26

Tarefa 3

1.1. Por ex., $g(x)=x^4$. **1.2.** Por ex., $g(x)=x^3-2x+1$.

1.3. Por ex., $g(x)=x^2+x-3$. **1.4.** Por ex., $g(x)=x^2$.

2.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2\geqslant0\ \wedge\ x\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

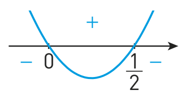
2.2.1. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$

2.2.2. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$

2.2.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

2.2.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x}=-1$

3.1. $D_h=\{x\in\mathbb{R}:\ 2x^2-x>0\}=\left]-\infty,\ 0\right[\cup\left]\dfrac{1}{2},\ +\infty\right[$



Cálculo auxiliar

$2x^2-x=0\Leftrightarrow x(2x-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee 2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=\dfrac{1}{2}$

$2x^2-x>0\Leftrightarrow x<0\vee x>\dfrac{1}{2}$

3.2.1. $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{2x^2-x}=\sqrt{0}=0$

3.2.2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\sqrt{2x^2-x}=\sqrt{0}=0$

3.2.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x}=\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-x)}=$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2)}=+\infty$

3.2.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-x}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-x)}=$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2)}=+\infty$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

4.1. $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 1 - \ln x \neq 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq e\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$

4.2.1. $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{5}{1 - \ln x} = \frac{5}{1 - (-\infty)} = \frac{5}{+\infty} = 0$

4.2.2. $\lim\limits_{x \to e^+} h(x) = \lim\limits_{x \to e^+} \frac{5}{1 - \ln x} = \frac{5}{1 - 1^+} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

4.2.3. $\lim\limits_{x \to e^-} h(x) = \lim\limits_{x \to e^-} \frac{5}{1 - \ln x} = \frac{5}{1 - 1^-} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

4.2.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{1 - \ln x} = \frac{5}{1 - (+\infty)} = \frac{5}{-\infty} = 0$

5.1. Existe $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x)$ se $\lim\limits_{x \to 0^-} f_k(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f_k(x)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f_k(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x - 1} = -1$ e

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_k(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln(x + k)\right) = \ln k$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f_k(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f_k(x) \Leftrightarrow -1 = \ln k \Leftrightarrow e^{-1} = k \Leftrightarrow k = \frac{1}{e}$

A função da família para a qual existe $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x)$ é

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(x + \frac{1}{e}\right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{x - 1} & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

5.2. $\lim\limits_{x \to 0^+} f_k(x) = 3 \lim\limits_{x \to 0^-} f_k(x) \Leftrightarrow \ln k = -3 \Leftrightarrow k = e^{-3} \Leftrightarrow k = \frac{1}{e^3}$

Pág. 27

Tarefa 4

1.1. A operadora mais favorável é a A.

1.2.1. $\lim\limits_{t \to 60^-} A(t) = 0{,}08$ **1.2.2.** $\lim\limits_{t \to 60^+} A(t) = 0{,}08$

1.2.3. $A(60) = 0{,}08$ **1.3.1.** $\lim\limits_{t \to 60^-} B(t) = 0{,}08$

1.3.2. $\lim\limits_{t \to 60^+} B(t) = 0{,}14$ **1.3.3.** $B(60) = 0{,}08$

2.1. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 2$; $f(4) = 2$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3$

2.2. $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x) = 2$; $g(4) = 2$; $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x) = 2$

2.3. $\lim\limits_{x \to 4^-} h(x) = 2$; $h(4) = 3$; $\lim\limits_{x \to 4^+} h(x) = 3$

2.4. $\lim\limits_{x \to 4^-} j(x) = 2$; $j(4) = 5$; $\lim\limits_{x \to 4^+} j(x) = 3$

Pág. 28

34. A função f é descontínua para $x = -1$ e para $x = 2$.
Não existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ porque os limites laterais são diferentes, logo f é descontínua para $x = -1$.
f é descontínua para $x = 2$ porque $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

35.1. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x + 1) = -1$ e

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x}{2} = -1$, logo $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -1$.

$f(-2) = \frac{-2}{2} = -1$

Como $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$, conclui-se que a função f é contínua em $x = -2$.

35.2. $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-x) = -3$ e

$\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 3x}{3 - x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x(x - 3)}{-(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x}{-1} = -3$,

logo $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -3$.

Como $g(3) = 1$, conclui-se que a função g é descontínua em $x = 3$ pois $\lim\limits_{x \to 3} g(x) \neq g(3)$.

35.3. $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (xe^x) = 0 \times 1 = 0$ e

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) \overset{0 \times \infty}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right)\right) =$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\frac{-\ln y}{y}\right) = 0$, logo $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$. $h(0) = 0$

Como $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0)$, conclui-se que a função h é contínua em $x = 0$.

Pág. 29

36.1. A função h é contínua em $x = 0$ se $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0)$.

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, donde se conclui que h é contínua em $x = 0$ se $h(0) = 1$.

36.2. A função h é contínua em $x = 1$ à esquerda se e só se $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = h(1)$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$, donde se conclui que h é contínua em $x = 1$ à esquerda se $h(1) = 2$.

36.3. A função h é contínua em $x = 1$ à direita se e só se $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = h(1)$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$, donde se conclui que h é contínua em $x = 1$ à direita se $h(1) = 3$.

37.1. $A(a, 5)$, sendo $a < 0$ e $f(a) = 5$

$f(x) = 5 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 32 \wedge x^2 - 4 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 \wedge x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$\Leftrightarrow \left(x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}\right) \wedge x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

Então, $a = -6$.

$B(b, 0)$, sendo $b > 0$ e $f(b) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 1 \wedge x^2 - 4 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 5 \wedge x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$\Leftrightarrow (x = 6 \vee x = -6) \wedge x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -6$

Então, $b = \sqrt{5}$.

37.2. $\lim\limits_{x \to a^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -6^-} f(x) = 5$ e $\lim\limits_{x \to a^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -6^+} (-2x - 7)$

$= 12 - 7 = 5$,

logo $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 5$.

$h(a) = f(-6) = 5$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Como $\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$, conclui-se que a função h é contínua em $x = a$.

$\lim\limits_{x \to b^+} h(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{5}^+} f(x) = 0$ e

$\lim\limits_{x \to b^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{5}^-} (-2x - 7) = -2\sqrt{5} - 7$, logo não existe $\lim\limits_{x \to b} h(x)$.

Como não existe $\lim\limits_{x \to b} h(x)$, conclui-se que a função h é descontínua em $x = b$.

Pág. 30

38. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x + 1) = 1$ e $f(0) = 1$, logo f é contínua em $x = 0$ à esquerda porque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x \times \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e $f(0) = 1$, logo f é descontínua em $x = 0$ à direita porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$.

39. A afirmação **I** é verdadeira porque f é contínua em todos os pontos do intervalo $]2, 3[$.

A afirmação **II** é falsa. A função f é contínua em todos os pontos do intervalo $]0, 2[$ e é contínua em 2 à esquerda, visto que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$, logo f é contínua em $]0, 2]$.

f é contínua em $]0, 2]$, mas é descontínua em 0 à direita, porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$.

Assim sendo, a função f é descontínua em $[0, 2]$.

A afirmação **III** é falsa.

40.1.1. $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = h(1) = 0$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1) \times \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1} \times \sqrt{x - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1) \times \sqrt{x - 1}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = 0$$

Como $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = h(1)$, conclui-se que a função h é contínua em $x = 1$.

40.1.2. $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x + 1) = -1$

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} = \frac{2 - 1}{\sqrt{2 - 1}} = 1$$

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$, conclui-se que não existe $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$.

Logo, a função h não é contínua em $x = 2$.

40.2.1. A afirmação é verdadeira.

A função h é contínua em $]1, 2[$, é contínua em 1 à direita e é contínua em 2 à esquerda, logo é contínua em $[1, 2]$.

40.2.2. Uma função é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

A função h não é contínua em $x = 2$, logo não é contínua. A afirmação é falsa.

Pág. 31

41.1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x - 6}{x^3 - x^2 + x - 1} = 6$ e $f(0) = 6$,

logo, qualquer função da família é contínua em $x = 0$.

41.2. f é contínua em $x = 1$ se $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{6x - 6}{x^3 - x^2 + x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{6(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{6}{x^2 + 1} = 3$$

Cálculo auxiliar

	1	-1	1	-1
1		1	0	1
	1	0	1	0

$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3 = 9^k \Leftrightarrow 3 = (3^2)^k \Leftrightarrow 3 = 3^{2k} =$

$= 1 = 2k \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$

42. Seja $a \in]-\infty, 2[$.

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 + (k - 2)x - 2k}{x - 2} = \frac{a^2 + (k - 2)a - 2k}{a - 2} =$$

$= g(a)$, donde se conclui que g é contínua em $x = a$.

Sendo a um elemento qualquer do intervalo $]-\infty, 2[$, então g é contínua em $]-\infty, 2[$.

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + (k - 2)x - 2k}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2^-} \frac{(x - 2)(x + k)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} (x + k) = 2 + k$$

Cálculo auxiliar

	1	$k - 2$	$-2k$
2		2	$2k$
	1	k	0

$x^2 + (k - 2)x - 2k = (x - 2)(x + k)$

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{kx}{2} + 2\right) = k + 2$ e $g(2) = k + 2$.

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = g(2)$, conclui-se que a função g é contínua em $x = 2$.

Seja $a \in]2, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{kx}{2} + 2\right) = \dfrac{ka}{2} + 2 = g(a)$, donde se conclui que g é contínua em $x = a$.

Sendo a um elemento qualquer do intervalo $]2, +\infty[$, então g é contínua em $]2, +\infty[$.

Então g é contínua, qualquer que seja o valor de k .

Pág. 32

43.1. As funções f e g não são contínuas em $x = 1$ porque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ e $\lim\limits_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$, $f(1) = 3$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ e $g(1) = -2$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

43.2. $\lim_{x\to 1}(f\times g)(x)=\lim_{x\to 1}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim_{x\to 1}f(x)\times\lim_{x\to 1}g(x)=$
$=-1\times 2=-2$

$(f\times g)(1)=f(1)\times g(1)=3\times(-2)=-6$

$\lim_{x\to 1}(f\times g)(x)\neq(f\times g)(1)$, logo, a função $f\times g$ não é contínua em $x=1$.

$\lim_{x\to 1}(f+g)(x)=\lim_{x\to 1}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}g(x)=$
$=-1+2=1$

$(f+g)(1)=f(1)+g(1)=3+(-2)=1$

$\lim_{x\to 1}(f+g)(x)=(f+g)(1)$, logo, a função $f+g$ é contínua em $x=1$.

$\lim_{x\to 1}(g^2)(x)=\lim_{x\to 1}(g(x)\times g(x))=\lim_{x\to 1}g(x)\times\lim_{x\to 1}g(x)=$
$=2\times 2=4$

$(g^2)(1)=(g\times g)(1)=g(1)\times g(1)=-2\times(-2)=4$

$\lim_{x\to 1}(g^2)(x)=(g^2)(1)$, logo, a função g^2 é contínua em $x=1$.

Pág. 33

44.1. $D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x} & \text{se } x>0\\ 1 & \text{se } x=0\\ \frac{-x}{x} & \text{se } x<0\end{cases}\iff f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\geqslant 0\\ -1 & \text{se } x<0\end{cases}$$

No intervalo $]0\,,+\infty[$ e no intervalo $]-\infty\,,0[$, a função é contínua porque é definida por uma função constante.

A função não é contínua para $x=0$ porque

$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$.

Conclusão: a função é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

44.2. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ (x>0\wedge\ln x\neq 0)\vee(x\leqslant 0\wedge e^x\neq 0)\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:\ (x>0\wedge x\neq 1)\vee(x\leqslant 0\wedge x\in\mathbb{R})\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

No conjunto $]0\,,+\infty[\setminus\{1\}$, a função é contínua porque é definida pelo quociente entre duas funções contínuas: uma função constante e uma logarítmica.

No intervalo $]-\infty\,,0[$, a função é contínua porque é definida pelo quociente entre duas funções contínuas: uma função constante e uma exponencial.

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{1}=1$ e

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{-\infty}=0$.

A função não é contínua para $x=0$ porque

$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$.

Conclusão: a função é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\,,1\}$.

44.3.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ (x>-1\wedge x^2-x-3\neq 0)\vee(x\leqslant -1\wedge x+2>0)\right\}=$
$=\left\{x\in\mathbb{R}:\ (x>-1\wedge x\neq 3\wedge x\neq -1)\vee(x\leqslant -1\wedge x>-2)\right\}=$
$=]-2\,,+\infty[\setminus\{3\}$

No conjunto $]-1\,,+\infty[\setminus\{3\}$, a função é contínua porque é definida por uma função racional com significado para todos os elementos do conjunto.

No intervalo $]-2\,,-1[$, a função é contínua porque é definida pelo quociente entre duas funções contínuas.

$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1+\ln(x+2)}{3}=\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}=$

$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x-3}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

A função não é contínua para $x=-1$ porque

$\lim_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim_{x\to -1^+}f(x)$.

Conclusão: a função é contínua em

$]-2\,,+\infty[\setminus\{-1\,,3\}$.

45. $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)=1+0=1$ e

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\ln(x+|k|)\right)=1+\ln(|k|)$.

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\iff 1=1+\ln(|k|)\iff 0=\ln(|k|)$

$\iff 1=|k|\iff k=1\vee k=-1$

Como $f(0)=k$, conclui-se que a função é contínua em $x=0$ se $k=1$.

Pág. 34

46.1.1. $C(2)=2$ **46.1.2.** $C(3{,}6)=3$ **46.1.3.** $C(-1{,}4)=-2$

46.2.1.

$$f(x)=\begin{cases}-2 & \text{se } x\in[-2\,,-1[\\ -1 & \text{se } x\in[-1\,,0[\\ 0 & \text{se } x\in[0\,,1[\\ 1 & \text{se } x\in[1\,,2[\\ 2 & \text{se } x\in[2\,,3[\\ 3 & \text{se } x=3\end{cases}$$

46.2.2. A função é descontínua em $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$ e $x=3$ porque, nesses pontos, os limites laterais são diferentes.

47.1. $D_h=\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{R}\wedge f(x)\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}\right\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{R}\wedge x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

47.2. A função h é contínua em $x=1$ porque f é contínua em $x=1$ e g é contínua em $f(1)$.

Pág. 35

Tarefa 5

1.1. $f(0)=3e^0+4=7$ e $f(e)=1+\ln(e^2)=1+2=3$.

Logo, $A(0\,,7)$ e $B(e\,,3)$.

1.2. $\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(3e^{\frac{x}{2}}+4\right)=7=g(0)$ e

$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Assim, a função g é contínua em $x = 0$ se $b = 7$.

$\lim_{x \to e^-} g(x) = \lim_{x \to e^-} (ax + 7) = ae + 7$ e

$\lim_{x \to e^+} g(x) = \lim_{x \to e^+} \left(1 + \ln(x^2)\right) = 3 = g(e)$.

Assim, a função g é contínua em $x = e$ se $ae + 7 = 3$, ou seja, se $a = -\frac{4}{e}$.

2.1. Como a função é contínua no seu domínio, é contínua em $x = k$.

$\lim_{t \to k^-} P(t) = \lim_{t \to k^-} (13{,}5 - 0{,}5 \times 3^{-0{,}3t+3}) =$

$= 13{,}5 - 0{,}5 \times 3^{-0{,}3k+3} = P(k)$ e $\lim_{t \to k^+} P(t) = 13$

P é contínua em $x = k$ se $13{,}5 - 0{,}5 \times 3^{-0{,}3k+3} = 13$.

$13{,}5 - 0{,}5 \times 3^{-0{,}3k+3} = 13 \Leftrightarrow 0{,}5 \times 3^{-0{,}3k+3} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow 3^{-0{,}3k+3} = 1 \Leftrightarrow -0{,}3k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 10$

2.2.1. $P(2) - P(1) =$

$= 13{,}5 - 0{,}5 \times 3^{-0{,}3 \times 2+3} - (13{,}5 - 0{,}5 \times 3^{-0{,}3 \times 1+3}) \approx -2{,}7$

Durante o segundo dia de trabalho foram acrescentados ao poço, aproximadamente, $2{,}7$ m de profundidade.

2.2.2. Como $P(t) = 13$, $\forall t \in]10, 12]$, conclui-se que houve paragens dos trabalhos no 11.º e 12.º dias após o início dos mesmos. Esses dias coincidiram com uma 5.ª-feira e uma 6.ª-feira.

2.2.3. A reta $y = 80$ é assintota horizontal do gráfico da função

pois $\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{80t - 700}{t + 8} = \lim_{t \to +\infty} \frac{80t}{t} = 80$.

Então, a profundidade final do poço é aproximadamente igual a 80 m.

Pág. 36

Tarefa 6

1. Através da análise das representações gráficas das funções f e g, conclui-se que o cliente poderia ter pago 3 € por uma encomenda em qualquer uma das modalidades (3 pertence ao contradomínio de qualquer uma das funções). Quanto à que custou 2,5 € foi necessariamente na modalidade A, pois 2,5 só pertence ao contradomínio da função f.

2. Através da análise da representação gráfica da função f conclui-se que o ponto de entrega da encomenda se encontra entre 100 km e 300 km.

3. Não. Por exemplo, na modalidade B a quantia de 2,5 € não corresponde a qualquer distância.

Pág. 38

48. Como f é contínua em $[1, 3]$ e $f(1) \times f(3) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que a função tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo.

Logo, a afirmação **I** é verdadeira.

A afirmação **II** é falsa pois só temos a garantia que qualquer valor compreendido entre $f(1)$ e $f(3)$, ou seja, entre -2 e 5, pertence ao contradomínio de f.

Se f é contínua em $[1, 3]$ e $f(1) < k < f(3)$, então, pelo Teorema de Bolzano, pode afirmar-se que

$\exists\, c \in]1, 3[: f(c) = k$.

Como $f(1) = -2$ e $f(3) = 5$, conclui-se que a afirmação **III** é verdadeira.

49. A função f é contínua em $\mathbb{R}$ porque é polinomial.

Então, f é contínua em $[1, 2]$.

$f(1) = 1^3 - 1 = 0$ e $f(2) = 2^3 - 2 = 6$

Como f é contínua em $[1, 2]$ e $f(1) < 3 < f(2)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que

$\exists\, c \in]1, 2[: f(c) = 3$.

Então, a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, 2[$.

50.1. h não é contínua em $x = 3$ porque

$\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2}{-x + 3} = \frac{9}{0^+} = +\infty$ e

$\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2}{-x + 3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$.

Como a função h não é contínua em $x = 3$, não é contínua no intervalo $[-6, 2]$.

Logo, o Teorema de Bolzano não permite afirmar que a equação $h(x) = 1$ é possível no intervalo $]-6, 2[$.

50.2. Pelo mesmo motivo se conclui que o Teorema de Bolzano não permite afirmar que a equação $h(x) = 1$ é possível no intervalo $]2, 4[$.

50.3. h é contínua em $[1, 2]$, $h(1) = \frac{1}{2}$ e $h(2) = 4$.

Como h é contínua em $[1, 2]$ e $h(1) < 1 < h(2)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que

$\exists\, c \in]1, 2[: h(c) = 1$,

isto é, a equação $h(x) = 1$ é possível no intervalo $]1, 2[$.

Pág. 39

51. A função g é contínua em $\mathbb{R}$ porque é polinomial.

Então, g é contínua em $[0, 1]$.

$g(0) = 1$ e $g(1) = 1^4 - 3 \times 1 + 1 = -1$

Como g é contínua em $[0, 1]$ e $g(0) \times g(1) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in]0, 1[: g(c) = 0$.

A equação $g(x) = 0$ é possível em $]0, 1[$.

52. Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - x$.

g é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a diferença entre duas funções contínuas. Em particular, é contínua em $[2, 3]$.

$g(2) = e^2 - 8 < 0$ e $g(3) = e^3 - 12 > 0$

Como g é contínua em $[2, 3]$ e $g(2) \times g(3) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que

$\exists\, c \in]2, 3[: g(c) = 0$.

Logo, a equação $f(x) - x = 0$, ou seja, $f(x) = x$, é possível em $]2, 3[$.

Assim, o gráfico da função f interseta a bissetriz dos quadrantes ímpares num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]2, 3[$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

53. A área do triângulo $[OAB]$ é dada em função de x pela função $f(x) = \frac{xe^x}{2}$.

f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser o produto entre duas funções contínuas: uma afim e outra exponencial.

Em particular, é contínua em $[\ln 2\,,\ \ln 8]$.

$f(\ln 2) = \frac{\ln 2 \times e^{\ln 2}}{2} = \frac{\ln 2 \times 2}{2} = \ln 2 \approx 0{,}7$ e

$f(\ln 8) = \frac{\ln 8 \times e^{\ln 8}}{2} = \frac{\ln 8 \times 8}{2} = 4 \ln 8 \approx 8{,}3$

Como f é contínua em $[\ln 2\,,\ \ln 8]$ e $f(\ln 2) < 7 < f(\ln 8)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in\,]\ln 2\,,\ \ln 8[\, : f(c) = 7$, isto é, a equação $f(x) = 7$ é possível no intervalo $]\ln 2\,,\ \ln 8[$.

Então, existe um ponto pertencente ao intervalo $]\ln 2\,,\ \ln 8[$ tal que a área do triângulo $[OAB]$ é 7.

54. Como g é contínua em $[a\,,\ b]$, então g tem pelo menos um zero pertencente a $]a\,,\ b[$ se $g(a) \times g(b) < 0$.

$g(a) \times g(b) < 0 \iff (1 - k) \times k < 0$

$\iff k \in\,]-\infty\,,\ 0[\, \cup\,]1\,,\ +\infty[$

Pág. 40

Tarefa 7

1.1. A função T é contínua em $[8{,}25\ ;\ 8{,}5]$.

$T(8{,}25) = -8 \times 8{,}25e^{-0{,}5\times 8{,}25} + 3 \approx 1{,}93$ e

$T(8{,}5) = -8 \times 8{,}5e^{-0{,}5\times 8{,}5} + 3 \approx 2{,}03$.

Como T é contínua em $[8{,}25\ ;\ 8{,}5]$ e $T(8{,}25) < 2 < T(8{,}5)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in\,]8{,}25\ ;\ 8{,}5[\, : T(c) = 2$.

Conclui-se que entre as 8:15 e as 8:30 houve um instante em que a temperatura atingiu os $2\ °C$.

1.2. A função T é contínua em $[5\ ;\ 5{,}5]$.

$T(5) = -8 \times 5e^{-0{,}5\times 5} + 3 \approx -0{,}28$ e

$T(5{,}5) = -8 \times 5{,}5e^{-0{,}5\times 5{,}5} + 3 \approx 0{,}19$

Como T é contínua em $[5\ ;\ 5{,}5]$ e $T(5) < 0 < T(5{,}5)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in\,]5\ ;\ 5{,}5[\, : T(c) = 0$.

Assim, conclui-se que entre as 5:00 e as 5:30 houve um instante em que a temperatura atingiu os $0\ °C$.
A temperatura atingiu os $0\ °C$, por exemplo, quando $t \in [5{,}25\ ;\ 5{,}3]$, isto é, entre as 5:15 e as 5:18.

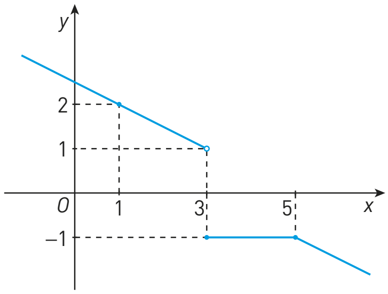
1.3. A função f é contínua em $\mathbb{R}$.
Em particular, é contínua no intervalo $[-6\,,\ -5]$.
$f(-6) = -8 \times (-6)e^{-0{,}5\times(-6)} + 3 \approx 967{,}1$ e
$f(-5) = -8 \times (-5)e^{-0{,}5\times(-5)} + 3 \approx 490{,}3$

Como f é contínua em $[-6\,,\ -5]$ e $f(-5) < 500 < f(-6)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in\,]-6\,,\ -5[\, : f(c) = 500$.

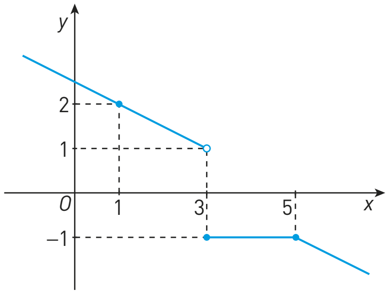
Logo, a equação $f(x) = 500$ é possível no intervalo $]-6\,,\ -5[$.

Como $]-6\,,\ -5[\, \subset [-6\,,\ -5]$, a equação $f(x) = 500$ é possível no intervalo $[-6\,,\ -5]$.

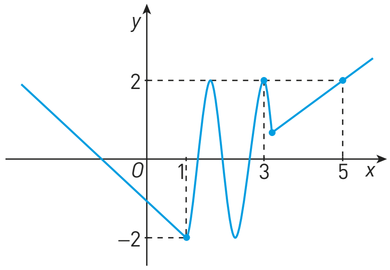
2. A afirmação **I** é falsa.
A representação gráfica seguinte satisfaz as condições dadas e não tem zeros em $]1\,,\ 3[$.



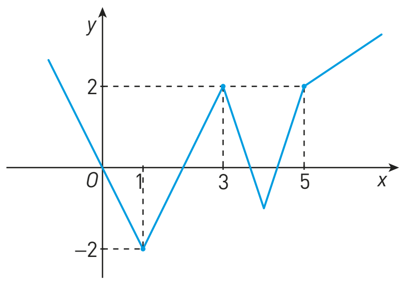
A afirmação **II** é falsa.
A representação gráfica seguinte satisfaz as condições dadas e a função é contínua em $]1\,,\ 3[$, mas, no entanto, não tem zeros em $]1\,,\ 3[$.



A afirmação **III** é falsa.
A representação gráfica seguinte satisfaz as condições dadas e a função é contínua em $[1\,,\ 3]$, mas tem mais do que um zero em $]1\,,\ 3[$.



A afirmação **IV** também é falsa.
A representação gráfica seguinte satisfaz as condições dadas e tem dois zeros em $]3\,,\ 5[$.



3.1.1. $f(x) = 0 \iff (\ln(x+1) - \ln x = 0 \wedge x > 0) \vee$
$\vee\, (x - (x+2)^2 = 0 \wedge x \leqslant 0)$

$\iff (\ln(x+1) = \ln x \wedge x > 0) \vee (x - x^2 - 4x - 4 = 0 \wedge x \leqslant 0)$

$\iff (x + 1 = x \wedge x > 0) \vee (-x^2 - 3x - 4 = 0 \wedge x \leqslant 0)$

$\iff (x \in \{\ \} \wedge x > 0) \vee (x \in \{\ \} \wedge x \leqslant 0) \iff x \in \{\ \}$

Então, a função h não tem zeros.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

3.1.2. $h(0) = 0 - (0+2)^2 = -4$ e $h(1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Logo, $h(0) \times h(1) < 0$.

3.2. Não é possível aplicar o Teorema de Bolzano à função h no intervalo $[0, 1]$ porque h não é contínua para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -4$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$, logo h não é contínua para $x = 0$ pois não existe $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

3.3. Como $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$, conclui-se que a reta de equação $x = 0$ é assintota vertical do gráfico da função h .

Pág. 41

Tarefa 8

1. $R(t) = 0 \iff 6t - 2t\ln(t+4) = 0 \iff t(6 - 2\ln(t+4)) = 0$

$\iff t = 0 \lor \ln(t+4) = 3 \iff t = 0 \lor t + 4 = e^3$

$\iff t = 0 \lor t = e^3 - 4$; $t = 0 \lor t \approx 16$

$P(t) = 0 \iff -0{,}05t^3 + 0{,}6t^2 = 0 \iff t^2(-0{,}05t + 0{,}6) = 0$

$\iff t^2 = 0 \lor -0{,}05t + 0{,}6 \iff t = 0 \lor t = 12$

O passeio da Rita demorou cerca de 16 min e o do Pedro demorou 12 min .

2. $R(5) = 30 - 10\ln(9)$ e $P(5) = -0{,}05 \times 5^3 + 0{,}6 \times 5^2 = 8{,}75$

Como $P(5) - R(5) \approx 0{,}72$, conclui-se que, ao fim de 5 minutos, os dois amigos se encontravam a, aproximadamente, 72 metros um do outro.

3. $P(t) = R(t) \iff P(t) - R(t) = 0$.

Seja f a função definida por $f(t) = P(t) - R(t)$.

f é contínua em $[4, 5]$ por ser a diferença entre duas funções contínuas.

$f(4) \approx -0{,}96$ e $f(5) \approx 0{,}72$

Como f é contínua em $[4, 5]$ e $f(4) \times f(5) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in]4, 5[: f(c) = 0$.

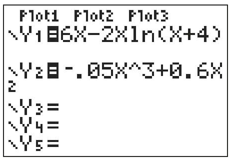
Então, a equação $P(t) - R(t) = 0$, ou seja, $P(t) = R(t)$, é possível em $]4, 5[$.

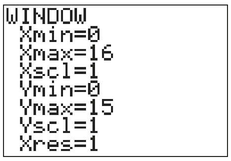
Assim, conclui-se que os dois amigos se encontram entre o 4.° e o 5.° minutos de percurso.

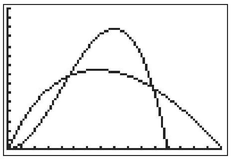
4. A Rita e o Pedro partiram no mesmo instante do ponto A , no sentido norte-sul. Inverteram o sentido da marcha ao fim de algum tempo e regressaram ao ponto de partida.

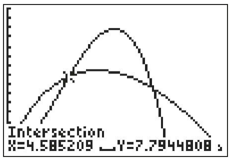
Os dois amigos encontraram-se nos instantes $t_1 \approx 4{,}59$ e $t_2 \approx 10{,}91$.

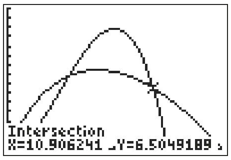
Da primeira vez que se encontraram deslocavam-se no sentido norte-sul e da segunda vez que se encontraram já se deslocavam no sentido sul-norte.



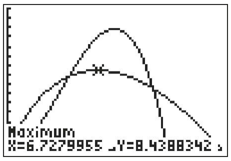


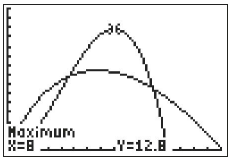






O passeio da Rita demorou cerca de 16 minutos e o do Pedro demorou 12 minutos, tendo a Rita percorrido, aproximadamente, 1688 m e o Pedro percorrido 2560 m .





Pág. 42

Tarefa 9

1.1.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

1.1.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2 + 2e^x) = 2 + 2 \times 0 = 2$

1.1.3. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2 + 2e^x) = 2 + 2 \times 1 = 4$

1.1.4. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

1.2. As equações das assintotas do gráfico de g são: $y = 2$ e $x = 0$.

2.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.2. Aplicando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, conclui-se que: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x + 1} = x + 2 + \dfrac{2}{x+1}$.

2.3.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 2 + \dfrac{2}{x+1}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

2.3.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + 2 + \dfrac{2}{x+1}\right) = -\infty + 0 = -\infty$

2.4. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, o gráfico de f não admite assintotas horizontais.

2.5.1. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(x + 2 + \dfrac{2}{x+1}\right) = 1 + \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

2.5.2. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(x + 2 + \dfrac{2}{x+1}\right) = 1 + \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

2.6. A reta de equação $x = -1$ é assintota vertical do gráfico de f .

Pág. 43

Tarefa 10

1. $f(0) = 4$ e $g(0) = 2$

Temperatura da substância no início da experiência A : 4 °C

Temperatura da substância no início da experiência B : 2 °C

NEMA12CPR2 © Porto Editora

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x + 2 + \frac{2}{x+1}\right) = +\infty + 0 = +\infty$ e

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x+2) = +\infty$

Os resultados obtidos indicam que, se as experiências se prolongassem no tempo, as temperaturas aumentariam sempre, tendendo para $+\infty$.

3. $f(x) = x + 2 + \frac{2}{x+1} = g(x) + \frac{2}{x+1}$ e $D = \mathbb{R}_0^+$

Como $x \geqslant 0$, conclui-se que $0 < \frac{2}{x+1} \leqslant 2$.

Logo, $f(x) > g(x)$, $\forall x \in D$.

4.

x (em minutos)	$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x+1}$	$g(x) = x + 2$	$f(x) - g(x)$
10	12,181 82	12	0,181 82
50	52,039 22	52	0,039 22
100	102,019 80	102	0,019 80
200	202,009 95	202	0,009 95
300	302,006 64	302	0,006 64
...	...	...	...

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - g(x)) = 0$, o que significa que, com o decorrer do tempo, as temperaturas tendem a aproximar-se.

Pág. 44

55.1. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

Então, a reta de equação $x = 2$ não é assintota do gráfico de f.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

Conclui-se que a reta de equação $x = -2$ é assintota do gráfico de f.

55.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ e

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f.

56.1. Sabe-se que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$, logo, a reta s é definida pela equação $y = -3$.

56.2.1. Por observação gráfica conclui-se que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

56.2.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_t = \frac{0-(-4)}{2-0} = 2$.

56.2.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (2x-4)\big) = 0$.

Pág. 45

57.1. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

57.2. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

57.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

57.4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

57.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

57.6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

57.7. $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(f(x) - \frac{x}{2} - 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right)\right) = 0$

Pág. 46

58.1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4} = \frac{-24}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4} = \frac{-24}{0^+} = -\infty$

A reta de equação $x = -2$ é assintota vertical do gráfico de g.

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x^2-x)}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x^2-x)}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

A reta de equação $x = 2$ não é assintota vertical do gráfico de g.

58.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$

O gráfico de g não tem assintotas horizontais porque $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ não pertencem a $\mathbb{R}$.

58.3. Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-4x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-3x^2+2x-x^3+4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$

A reta de equação $y = x - 3$ é assintota oblíqua do gráfico de g quando $x \longrightarrow -\infty$.

De forma análoga se conclui que a reta de equação $y = x - 3$ também é assintota oblíqua do gráfico de g quando $x \longrightarrow +\infty$.

59.1. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2-2x}{x+1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{0}{2} = 0$

Não existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ porque $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Logo, a função f é descontínua em $x = -1$.

A reta de equação $x = -1$ é assintota vertical do gráfico de f porque $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.

59.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1) = -1$

A reta de equação $y = -1$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Quando $x \longrightarrow -\infty$, $f(x) = x - 3 + \frac{3}{x+1}$.

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -2x & +0 & x+1 \\ \hline -x^2 & -x & & x-3 \\ \hline & -3x & +0 & \\ & 3x & +3 & \\ \hline & & +3 & \end{array}$$

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x-3)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x+1} = 0$, conclui-se que a reta de equação $y = x - 3$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -1 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

As assintotas não verticais do gráfico de f intersetam-se no ponto de coordenadas $(2, -1)$.

Pág. 47

60.1. $D_h = \{x \in \mathbb{R}: (x < 1 \wedge x^2 - 1 \neq 0) \vee (x \geqslant 1 \wedge x^2 + 1 \neq 0)\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: (x < 1 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1) \vee (x \geqslant 1 \wedge x \in \mathbb{R})\} =$
$= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

60.2. $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

A reta de equação $x = -1$ é assintota vertical do gráfico de h.

$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$

A reta de equação $x = 1$ é assintota vertical do gráfico de h.

60.3. Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} =$$
$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim\limits_{x \to -\infty} (h(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x\right) =$$
$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

A reta de equação $y = x$ é assintota oblíqua do gráfico de h quando $x \longrightarrow -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} (2) = 2$$

A reta de equação $y = 2$ é assintota horizontal do gráfico de h quando $x \longrightarrow +\infty$.

61. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: |x - 1| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Assintotas verticais

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2}{|x - 1|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2}{|x - 1|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

A reta de equação $x = 1$ é assintota vertical do gráfico de f.

Assintotas não verticais

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{|x - 1|}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x(-x + 1)} =$$
$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$b = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{|x - 1|} + x\right) =$$
$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{-x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

A reta de equação $y = -x - 1$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{|x - 1|}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x(x - 1)} =$$
$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{|x - 1|} - x\right) =$$
$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

A reta de equação $y = x + 1$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

62.1. $D_f = \mathbb{R}$

Assintotas verticais

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assintotas verticais.

Assintotas não verticais

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x - 3e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{3e^{-x}}{x}\right) =$$
$$= \lim\limits_{y \to +\infty} \left(2 - \frac{3e^y}{-y}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(2 + 3\frac{e^y}{y}\right) = +\infty$$

Mudança de variável:

Fazendo $-x = y$, vem $y = -x$.

Se $x \longrightarrow -\infty$, então $y \longrightarrow +\infty$.

Como $m \notin \mathbb{R}$, conclui-se que não existe assintota não vertical quando $x \longrightarrow -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 3e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{3e^{-x}}{x}\right) =$$
$$= 2 - \frac{0}{+\infty} = 2 - 0 = 2$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3e^{-x} - 2x) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (-3e^{-x}) = 0$

A reta de equação $y = 2x$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Conclusão: O gráfico da função f admite uma única assintota, a reta de equação $y = 2x$.

62.2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geqslant 0\} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

Assintotas verticais

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \left(2x + \sqrt{x^2 - 4}\right) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(2x + \sqrt{x^2 - 4}\right) = 4$

As retas de equações $x = -2$ e $x = 2$ não são assintotas verticais do gráfico de f.

Como a função é contínua no seu domínio, por ser a soma de duas funções contínuas, conclui-se que o seu gráfico não admite assintotas verticais.

Assintotas não verticais

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x}\right) = 2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} =$

$= 2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = 2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right) =$

$= 2 + (-1) = 1$

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 - 4} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)}{x - \sqrt{x^2 - 4}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4}{x - \sqrt{x^2 - 4}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x - \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{4}{-\infty} = 0$

A reta de equação $y = x$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 4}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x}\right) = 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} =$

$= 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right) = 2 + 1 = 3$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 - 4} - 3x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 4} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \frac{-4}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 3x$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Conclusão: O gráfico da função f admite duas assintotas, as retas de equações $y = x$ e $y = 3x$.

63.1. O gráfico da função $g(x) = f(x + 1)$ pode ser obtido do gráfico da função f através de uma translação associada ao vetor $\vec{v}(-1, 0)$.

Assintotas do gráfico da função g:

$y = -2$ e $y = -3(x + 1) + 1 \iff y = -3x - 2$

63.2. O gráfico da função $g(x) = f(-x)$ pode ser obtido do gráfico da função f através de uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas.

Assintotas do gráfico da função g:

$y = -2$ e $y = -3(-x) + 1 \iff y = 3x + 1$

63.3. O gráfico da função $g(x) = 1 - f(x)$ pode ser obtido do gráfico da função f através de uma reflexão em relação ao eixo das abcissas seguida de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0, 1)$.

Assintotas do gráfico da função g:

$y = -(-2) + 1 \iff y = 3$ e $y = -(-3x + 1) + 1 \iff y = 3x$

Pág. 48

64. $D_g = \mathbb{R}$

Assintotas verticais

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2x^3}{x^2 + 2} = 0$ e

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x - \ln(x + 1)) = -\infty - 0 = -\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assintota vertical do gráfico de g.

Assintotas não verticais

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2 + 2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^3 + 2x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 + 2} - 2x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - 4x}{x^2 + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4}{x} = 0$

A reta de equação $y = 2x$ é assintota oblíqua do gráfico de g quando $x \longrightarrow -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x - \ln(x + 1)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-(\ln(x + 1) - \ln x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\ln\left(\frac{x + 1}{x}\right)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{0}{+\infty} = 0$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$b = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (\ln x - \ln(x+1) - 0x) =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de g quando $x \longrightarrow -\infty$.

65. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 1 - \ln x \neq 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq e\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$

Assintotas verticais

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{1 - \ln x} = \frac{3}{1 - (-\infty)} = \frac{3}{+\infty} = 0$

A reta de equação $x = 0$ não é assintota vertical do gráfico de f.

$\lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^-} \frac{3}{1 - \ln x} = \frac{3}{0^+} = +\infty$ e

$\lim_{x \to e^+} f(x) = \lim_{x \to e^+} \frac{3}{1 - \ln x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

A reta de equação $x = e$ é assintota vertical do gráfico de f.

Assintota horizontal

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1 - \ln x} = \frac{3}{-\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f.

66.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Assintotas verticais

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x + \ln x) = -\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assintota vertical do gráfico de f.

Como a função f é contínua no seu domínio, o seu gráfico não admite mais nenhuma assintota vertical.

Assintotas não verticais

Só faz sentido averiguar a existência de assintota não vertical quando $x \longrightarrow +\infty$ porque $D_f = \mathbb{R}^+$.

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + \ln x}{x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(-1 + \frac{\ln x}{x}\right) = -1 + 0 = -1$

$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (-x + \ln x + x) =$

$= \lim_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$

Como $b \notin \mathbb{R}$, conclui-se que não existe assintota não vertical.

Conclusão: O gráfico da função f admite uma única assintota, a reta de equação $x = 0$.

66.2. $D_f = \mathbb{R}$

Assintotas verticais

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser o produto entre duas funções contínuas (uma afim e outra exponencial) o seu gráfico não admite assintotas verticais.

Assintotas não verticais

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Como $m \notin \mathbb{R}$, conclui-se que não existe assintota não vertical quando $x \longrightarrow -\infty$.

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (xe^{-x} - 0x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Conclusão: O gráfico da função f admite uma única assintota, a reta de equação $y = 0$.

67.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x > 0 \wedge x + 1 > 0 \wedge \ln(x+1) \neq 0) \vee$
$\vee (x < 0 \wedge x \neq 0)\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : (x > 0 \wedge x > -1 \wedge x \neq 0) \vee (x < 0)\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

67.2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = 0 - 0 = 0$ e

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ porque $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Logo, qualquer prolongamento de f a $\mathbb{R}$ é uma função não contínua.

67.3. Seja g o prolongamento de f a $\mathbb{R}$ que é uma função contínua à esquerda de $x = 0$.

Então, $\lim_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$, ou seja,

$g(0) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

Assim, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

67.4. **Assintotas verticais**

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, a reta de equação $x = 0$ é assintota vertical do gráfico de f.

Assintota horizontal

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Assintota oblíqua

Quando $x \longrightarrow -\infty$:

$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 1\right) =$

$= \frac{1}{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$

$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - x + x\right) = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

A reta de equação $y = -x + 1$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 49

68.1. O domínio da função é $\mathbb{R}$. O possível ponto de descontinuidade é $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (k - xe^x) = k - 0 = k$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = 1$ e $g(0) = k$.

g é contínua em $x = 0$ se e só se

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$, ou seja, se $k = 1$.

A função da família que é contínua em $\mathbb{R}$ é a que está associada a $k = 1$.

68.2. Sendo $k = 2$, então $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} & \Leftarrow x > 0 \\ 2 - xe^x & \Leftarrow x \leqslant 0 \end{cases}$

Assintotas verticais

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$, logo, a reta de equação $x = 0$ não é assintota vertical do gráfico de g.

Assintota horizontal

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2 - xe^x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \dfrac{-x}{e^{-x}}\right) = 2 + 0 = 2$

A reta de equação $y = 2$ é assintota horizontal do gráfico de g quando $x \longrightarrow -\infty$.

Assintota oblíqua

Quando $x \longrightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

A reta de equação $y = x + 2$ é assintota oblíqua do gráfico de g quando $x \longrightarrow +\infty$.

69.1. $D_{\frac{1}{f}} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \neq 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

69.2. **Assintota vertical**

$\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ e

$\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$, logo, a reta de equação $x = 2$ é assintota vertical do gráfico da função $\dfrac{1}{f}$.

Assintotas horizontais

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

A reta de equação $y = -\dfrac{1}{3}$ é assintota horizontal do gráfico da função $\dfrac{1}{f}$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

O gráfico da função $\dfrac{1}{f}$ não admite assintota horizontal quando $x \longrightarrow -\infty$.

Pág. 50

Proposta 1

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{g(2)} = 0$ e $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\overbrace{f(-2)}^{<0}}{0^-} = +\infty$

A opção correta é a **(B)**.

Proposta 2

1.1. $\lim(u_n) = \lim\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2^-$, logo $\lim\big(f(u_n)\big) = 6$.

1.2. $\lim(v_n) = \lim(-n^2 + 1) = -\infty$, logo $\lim\big(f(v_n)\big) = -2$.

1.3. $\lim(w_n) = \lim(2 + \pi^{-n}) = 2^+$, logo $\lim\big(f(w_n)\big) = -\infty$.

1.4. $\lim(t_n) = \lim(\log_2 n) = +\infty$, logo $\lim\big(f(t_n)\big) = 1$.

1.5. $\lim(s_n) = \lim \dfrac{(-1)^n}{e^{n+1}} = 0$, logo $\lim\big(f(s_n)\big) = 0$.

2.1. $z_n = \dfrac{2n + k}{n + 1} = 2 + \dfrac{k - 2}{n + 1}$

Se $\lim f(z_n) = -\infty$, então $\lim(z_n) = 2^+$.

$\lim(z_n) = 2^+ \Leftrightarrow k - 2 > 0 \Leftrightarrow k > 2$

Então, $\lim f(z_n) = -\infty$ se, por exemplo, $k = 3$.

2.2. Se $\lim f(z_n) = 6$, então $\lim(z_n) = 2^-$.

$\lim(z_n) = 2^- \Leftrightarrow k - 2 < 0 \Leftrightarrow k < 2$

Então, $\lim f(z_n) = 6$ se, por exemplo, $k = 1$.

Proposta 3

Se $\lim f(u_n) = -2$, então $\lim(u_n) = +\infty$ ou $\lim(u_n) = -\infty$.

A opção correta é a **(C)**.

Pág. 51

Proposta 4

1.1. $\lim(u_n) = \lim\left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2^+$, logo

$\lim\big(g(u_n)\big) = \lim\left(1 + \dfrac{3}{u_n - 2}\right) = 1 + \dfrac{3}{2^+ - 2} = 1 + \dfrac{3}{0^+} = +\infty$.

1.2. $\lim(v_n) = \lim\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2^-$, logo $\lim(g(v_n)) = \lim(2v_n) =$

$= 2 \times 2 = 4$.

2.1. Seja (u_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de g tal que $\lim(u_n) = 1$.

$g(u_n) = 2u_n$, logo $\lim g(u_n) = \lim(2u_n) = 2 \times 1 = 2$.

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$.

2.2. Seja (a_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de g tal que $\lim(a_n) = 2^+$.

$g(a_n) = 1 + \dfrac{3}{a_n - 2}$, logo

$\lim g(a_n) = \lim\left(1 + \dfrac{3}{a_n - 2}\right) = 1 + \dfrac{3}{2^+ - 2} = 1 + \dfrac{3}{0^+} = +\infty$.

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$.

2.3. Seja (b_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de g tal que $\lim(b_n) = 2^-$.

$g(b_n) = 2\,b_n$, logo $\lim g(b_n) = \lim(2\,b_n) = 2 \times 2^- = 4$.

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 4$.

3. Não existe $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ porque $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$.

Proposta 5

1. $1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{n} < 2, \forall n \in \mathbb{N}$, logo

$u_n = f\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{\dfrac{2n-1}{n}} = \dfrac{n}{2n-1}$.

A opção correta é a **(A)**.

2. $\lim(v_n) = \lim\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1^-$, logo

$\lim(f(v_n)) = \lim(\ln(1 - v_n)) = \ln(0^+) = -\infty$.

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 6

1. Seja (u_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de g tal que $\lim(u_n) = 3$.

$g(u_n) = 2 - \dfrac{u_n}{u_n + 1}$, logo

$\lim g(u_n) = \lim\left(2 - \dfrac{u_n}{u_n + 1}\right) = 2 - \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{5}{4}$.

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \dfrac{5}{4}$.

2. Seja (v_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes ao domínio de g tal que $\lim(v_n) = +\infty$.

$g(v_n) = 2 - \dfrac{v_n}{v_n + 1}$, logo $\lim g(v_n) = \lim\left(2 - \dfrac{v_n}{v_n + 1}\right) =$

$= \lim\left(2 - 1 + \dfrac{1}{v_n + 1}\right) = 1 + \dfrac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

Pág. 52

Proposta 7

Se f é contínua em $x = 2$ então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 8

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^{1-x} - 6}{f(x)} = \dfrac{0 - 6}{2} = -3$ A opção correta é a **(D)**.

Proposta 9

1. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{0}{f(c)} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{1}{(f \times g)(x)} = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{1}{f(x) \times g(x)} = \dfrac{1}{\underbrace{k \times 0^-}_{k<0}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to b} (f - g)(x) = \lim\limits_{x \to b} (f(x) - g(x)) = f(b) - g(b) = 0$

4. $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{g(b)}{f(b)} = 1$

5. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\overbrace{g(0)}^{>0}}{0^-} = -\infty$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx^3 + ex^2 + fx + g} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^2}{dx^3} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{dx} = 0$

Proposta 10

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - x^2 - 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x^2+x} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Cálculo auxiliar

	1	−1	−2	0
2		2	2	0
	1	1	0	0

$x^3 - x^2 - 2x = (x-2)(x^2+x)$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{-x^4 + 3x^2 + 4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{-x^4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \times h)(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) \times h(x)) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4) \times \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 3x^2 + 4) =$

$= +\infty \times (-\infty) = -\infty$

4. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{h(x)} \times f(x)\right) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{-x^4 + 3x^2 + 4} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(-x^3 + 2x^2 - x + 2)} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-2}{-x^3 + 2x^2 - x + 2} = \dfrac{-4}{20} = -\dfrac{1}{5}$

Cálculo auxiliar

	−1	0	3	0	4
−2		2	−4	2	−4
	−1	2	−1	2	0

$-x^4 + 3x^2 + 4 = (x+2)(-x^3 + 2x^2 - x + 2)$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} (g - f)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - f(x)) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2 - 2x - (x^2 - 4)) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 - 2x + 4) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

6. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - x^2 - 2x} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 53

Proposta 11

1. g é uma função quadrática cujos zeros são -2 e 5, logo $g(x) = a(x+2)(x-5)$.

$g(0) = m \Leftrightarrow a(0+2)(0-5) = m \Leftrightarrow -10a = m$

$\Leftrightarrow a = -0{,}1m$ Logo, $g(x) = -0{,}1m(x+2)(x-5)$, ou seja,

$g(x) = -0{,}1mx^2 + 0{,}3mx + m$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{25-x^2}{g(x)} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{25-x^2}{-0{,}1mx^2+0{,}3mx+m} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{-0{,}1mx^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{-0{,}1m} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -20$$

2. $$\lim_{x\to5} \frac{25-x^2}{g(x)} = 7 \Leftrightarrow \lim_{x\to5} \frac{-(x-5)(x+5)}{-0{,}1m(x+2)(x-5)} = 7$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to5} \frac{-(x+5)}{-0{,}1m(x+2)} = 7 \Leftrightarrow \frac{-10}{-0{,}7m} = 7 \Leftrightarrow m = \frac{100}{49}$$

Proposta 12

1. $$\lim_{x\to+\infty} (f-g)(x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2-9}-2x\right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-9}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-9}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-9}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-9-4x^2}{\sqrt{4x^2-9}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9}{\sqrt{4x^2-9}+2x} = \frac{-9}{+\infty} = 0$$

2. $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{g(x)+h(x)} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{2x+x^2-3} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x^2+2x-3)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)(x+3)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{4\times2} = \frac{1}{8}$$

3. $$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{f(x)-\sqrt{3}}{h(x)} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4x^2-9}-\sqrt{3}}{x^2-3} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\left(\sqrt{4x^2-9}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4x^2-9}+\sqrt{3}\right)}{(x^2-3)\left(\sqrt{4x^2-9}+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{4x^2-9-3}{(x^2-3)\left(\sqrt{4x^2-9}+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{4(x^2-3)}{(x^2-3)\left(\sqrt{4x^2-9}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{4}{\sqrt{4x^2-9}+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(e^3)^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2-3}\right] =$$

$$= +\infty \times 1 = +\infty$$

5. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-9}}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2\left(1-\frac{9}{4x^2}\right)}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|2x|\sqrt{1-\frac{9}{4x^2}}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\sqrt{1-\frac{9}{4x^2}}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{9}{4x^2}} = \sqrt{1-0} = 1$$

Proposta 13

1. $$\lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{x^2-2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{x^2+2x+4}{x} = \frac{12}{2} = 6$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x+2x^3}{x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (2x) = +\infty$$

3. $$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

4. $$\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{3-\sqrt{2x+3}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to3} \frac{(x^2-9)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+3}\right)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(x+3)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)}{9-(2x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(x+3)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)}{-2x+6} =$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(x+3)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)}{-2(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{(x+3)\left(3+\sqrt{2x+3}\right)}{-2} = \frac{6\times6}{-2} = -18$$

5. $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-2x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{x^2+1}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-4x^2}{\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2} = -\infty$$

6. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}-3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}-3} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-3} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-\frac{3}{x}} = \frac{1}{-1-0} = -1$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2+9-9} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+9}+3}{x} = \dfrac{6}{0^+} = +\infty$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2}{1-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{(x-1)\,(x+1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)(x+1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\,(x+2)}{(x-1)\,(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{|x-5|}{x^2-25} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{-x+5}{(x-5)\,(x+5)} = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{-(x-5)}{(x-5)\,(x+5)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{-1}{x+5} = -\dfrac{1}{10}$

Pág. 54

Proposta 14

1.1. Por observação dos gráficos das funções f e g, constata-se que

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$, $f(-1) = 4$, $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 1$ e $g(-1) = -1$.

Então, as funções f e g são descontínuas em $x = -1$ porque $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$ e $\lim\limits_{x\to -1} g(x) \neq g(-1)$.

Assim sendo, a afirmação é verdadeira.

1.2. $\lim\limits_{x\to -1} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to -1} (f(x) + g(x)) =$

$= \lim\limits_{x\to -1} f(x) + \lim\limits_{x\to -1} g(x) = 2 + 1 = 3$ e

$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 4 + (-1) = 3$

Como $\lim\limits_{x\to -1} (f+g)(x) = (f+g)(-1)$, a função $f+g$ é contínua em $x = -1$.

Assim sendo, a afirmação é verdadeira.

1.3. $\lim\limits_{x\to 1} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to 1} (f(x) + g(x)) =$

$= \lim\limits_{x\to 1} f(x) + \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2 + 1 = 3$ e

$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 4 + 2 = 6$

Como $\lim\limits_{x\to 1} (f+g)(x) \neq (f+g)(1)$, a função $f+g$ é descontínua em $x = 1$.

Assim sendo, a afirmação é verdadeira.

2. Por exemplo, a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1 \\ -2 & \text{se } x = -1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Neste caso, a função $g \times h$ é contínua porque $(g \times h)(x) = 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Proposta 15

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x > 4 \wedge x^3 - 16x \neq 0) \vee$

$\vee\ x = 4 \vee (x < 4 \wedge 8x \neq 0)\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : (x > 4 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4 \wedge x \neq -4) \vee$

$\vee\ x = 4 \vee (x < 4 \wedge x \neq 0)\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{k^2-6}{8x} = 0$, logo a reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-16x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x^3-16x)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-4}{x\,(x-4)\,(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x\,(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ também é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Conclui-se, então, que o gráfico da função f admite uma e uma só assintota horizontal, a reta de equação $y = 0$.

3. Existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ se $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ e f é descontínua em $x = 4$ se $\lim\limits_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{k^2-6}{8x} = \dfrac{k^2-6}{32}$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-16x} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x^3-16x)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x-4}{x\,(x-4)\,(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x\,(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \dfrac{1}{128}$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \iff \dfrac{k^2-6}{32} = \dfrac{1}{128} \iff 4k^2 - 24 = 1$

$\iff k^2 = \dfrac{25}{4} \iff k = \dfrac{5}{2} \vee k = -\dfrac{5}{2}$

Se $k = \dfrac{5}{2} \vee k = -\dfrac{5}{2}$ então f é descontínua em $x = 4$ porque

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \dfrac{1}{128} \wedge f(4) = \dfrac{5}{2}$.

Pág. 55

Proposta 16

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 \times 2^{-x}) = 1 \times 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\sqrt{x+3}+2\right) = 4$

Não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ porque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

2. Como não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, a função f não é contínua em $x = 1$.

3. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 \times 2^{-x}) = 1 \times 2$ e $f(-1) = 1 \times 2 = 2$

f é contínua em $x = -1$ porque $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2} = \dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} =$

$= \dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$ e $f(2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$

f é contínua em $x = 2$ porque $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

4. Se $a < 1$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (x^2 \times 2^{-x}) = a^2 \times 2^{-a}$ e $f(a) = a^2 \times 2^{-a}$.

f é contínua em $x = a$ porque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se $a > 1$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \dfrac{a-1}{\sqrt{a+3}-2}$ e

$f(a) = \dfrac{a-1}{\sqrt{a+3}-2}$.

f é contínua em $x = a$ porque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Conclui-se, então, que se $a \neq 1$ a função f é contínua em $x = a$.

Proposta 17

Vamos estudar a continuidade das funções f e g para $t = 4$ porque é o único ponto onde as funções podem ser descontínuas.

$\lim\limits_{t \to 4^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 4^-} (8 + 5t \times 2^{-0,5t}) = 8 + 20 \times 2^{-2} =$

$= 8 + 20 \times \dfrac{1}{4} = 13$

$\lim\limits_{t \to 4^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 4^+} (-0,2t^2 + 16,2) = -0,2 \times 4^2 + 16,2 = 13$

f é contínua para $t = 4$ porque $\lim\limits_{t \to 4^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 4^+} f(t) = f(4)$.

$\lim\limits_{t \to 4^-} g(t) = \lim\limits_{t \to 4^-} \big(8 + \log_2(6t+8)\big) = 8 + \log_2(32) =$

$= 8 + 5 = 13$

$\lim\limits_{t \to 4^+} g(t) = \lim\limits_{t \to 4^+} \dfrac{3t-12}{\sqrt{t}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{t \to 4^+} \dfrac{(3t-12)(\sqrt{t}+2)}{(\sqrt{t}-2)(\sqrt{t}+2)} =$

$= \lim\limits_{t \to 4^+} \dfrac{3(t-4)(\sqrt{t}+2)}{t-4} = \lim\limits_{t \to 4^+} (3\sqrt{t}+6) = 12$

g é descontínua para $t = 4$ porque $\lim\limits_{t \to 4^-} g(t) \neq \lim\limits_{t \to 4^+} g(t)$.

Conclui-se que a função que não corresponde à evolução da temperatura do líquido durante a experiência é a g porque é descontínua para $t = 4$.

Proposta 18

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \log_2(6-x) = \log_2 4 = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{3}{4}$

Não existe $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ porque $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$.

Logo, a função é descontínua em $x = 2$. Então, a função é descontínua qualquer que seja o valor de k .

3.1. g é contínua à direita de 2 se $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = g(2)$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = g(2) \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} = 2^{1-k} \Leftrightarrow 1 - k = \log_2\left(\dfrac{3}{4}\right)$

$\Leftrightarrow -k = -1 + \log_2 3 - \log_2 4 \Leftrightarrow -k = -1 + \log_2 3 - 2$

$\Leftrightarrow k = 3 - \log_2 3$

3.2. g é contínua à esquerda de 2 se $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = g(2)$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = g(2) \Leftrightarrow 2 = 2^{1-k} \Leftrightarrow 1 = 1 - k \Leftrightarrow k = 0$

Pág. 56

Proposta 19

A opção correta é a **(D)**.

Sendo f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, a função $g - f$ também é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a diferença entre duas funções contínuas.

Em particular, é contínua em $[2\,,\,3]$.

$(g - f)(2) = g(2) - f(2) > 0$ porque $f(2) < g(2)$.

$(g - f)(3) = g(3) - f(3) < 0$ porque $f(3) > g(3)$.

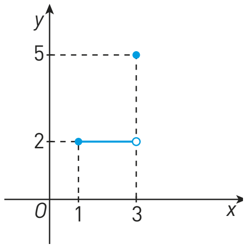
Como a função $g - f$ é contínua em $[2\,,\,3]$ e $(g - f)(2) \times (g - f)(3) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, $\exists\, c \in \,]2\,,\,3[\, : (g - f)(c) = 0$.

Assim, conclui-se que a função $g - f$ tem pelo menos um zero no intervalo $]2\,,\,3[$.

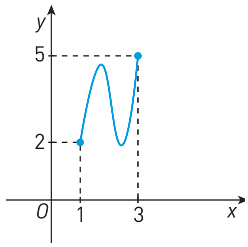
Como o intervalo $]2\,,\,3[$ está contido no intervalo $[2\,,\,3]$, então conclui-se também que a função $g - f$ tem pelo menos um zero no intervalo $[2\,,\,3]$.

Proposta 20

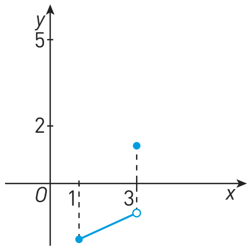
1. I – Por exemplo:



II – Por exemplo:



III – Por exemplo:



2. Tendo em atenção o Teorema de Bolzano, conclui-se que a função é necessariamente descontínua em $[1\,,\,3]$ nas situações I e III.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Proposta 21

1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$ porque é polinomial.

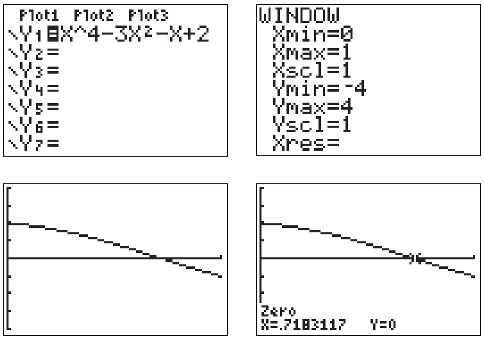
Então, f é contínua em $[0\ ,\ 1]$.

$f(0) = 2$ e $f(1) = 1^4 - 3 \times 1^2 - 1 + 2 = -1$

Como f é contínua em $[0\ ,\ 1]$ e $f(2) < 0 < f(1)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in \,]0\ ,\ 1[\ :\ f(c) = 0$.

Então, a função f tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $]0\ ,\ 1[$.

2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora podemos começar por determinar o zero da função que pertence ao intervalo $]0\ ,\ 1[$.



Então, por exemplo, o intervalo $]0{,}7183\ ;\ 0{,}7184[$ satisfaz as duas condições dadas.

Proposta 22

1. $f(x) = x \iff 2 + \ln x = x \iff 2 - x + \ln x = 0$

Consideremos a função g definida por $g(x) = 2 - x + \ln x$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$ porque é a soma de duas funções contínuas, uma afim e outra logarítmica.

Então, em particular, g é contínua em $[3\ ,\ 4]$.

$g(3) = -1 + \ln 3 \approx 0{,}1$ e $g(4) = -2 + \ln 4 \approx -0{,}6$

Como g é contínua em $[3\ ,\ 4]$ e $g(3) \times g(4) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in \,]3\ ,\ 4[\ :\ g(c) = 0$.

Então, a função g tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $]3\ ,\ 4[$, isto é, o gráfico de f interseta a bissetriz dos quadrantes ímpares num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]3\ ,\ 4[$.

2. A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$ porque é a soma de duas funções contínuas, uma afim e outra logarítmica.

Então, em particular, f é contínua em $[\mathrm{e}\ ,\ +\infty[$.

$f(\mathrm{e}) = 2 + \ln \mathrm{e} = 3$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \ln x) = +\infty$

Seja k um número real pertencente ao intervalo $]\mathrm{e}\ ,\ +\infty[$.

Como f é contínua em $[\mathrm{e}\ ,\ +\infty[$ e $f(\mathrm{e}) < k$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que:
$\exists\, c \in \,]\mathrm{e}\ ,\ +\infty[\ :\ f(c) = k$.

Logo, a equação $f(x) = k$ é possível no intervalo $]\mathrm{e}\ ,\ +\infty[$.

Pág. 57

Proposta 23

I. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $[a\ ,\ b]$.

Como f é contínua em $[a\ ,\ b]$ e $f(a) < g(b) < f(b)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, x_0 \in \,]a\ ,\ b[\ :\ f(x_0) = g(x_0)$.

Então, a equação $f(x) = g(b)$ é possível no intervalo $]a\ ,\ b[$.

Logo, também é possível em $[a\ ,\ b]$.

II. Sendo f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, a função $f - g$ também é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a diferença entre duas funções contínuas.

Em particular, é contínua em $[a\ ,\ b]$.

$(f-g)(a) = f(a) - g(a) > 0$ porque $f(a) > g(a)$.

$(f-g)(b) = f(b) - g(b) < 0$ porque $f(b) < g(b)$.

Como a função $f - g$ é contínua em $[a\ ,\ b]$ e $(f-g)(a) \times (f-g)(b) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, $\exists\, x \in \,]a\ ,\ b[\ :\ (f-g)(x) = 0$.

Assim, conclui-se que a função $f - g$ tem pelo menos um zero no intervalo $]a\ ,\ b[$.

Logo, tem pelo menos um zero no intervalo $[a\ ,\ b]$.

III. Sendo f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, a função $\frac{g}{f}$ também é contínua em $\mathbb{R}$ por ser o quociente entre duas funções contínuas (em que f não se anula em $[b\ ,\ c]$) .

Em particular, é contínua em $[b\ ,\ c]$.

$\left(\frac{g}{f}\right)(b) = \frac{g(b)}{f(b)} > 0$ porque $g(b) > 0$ e $f(b) > 0$.

$\left(\frac{g}{f}\right)(c) = \frac{g(c)}{f(c)} < 0$ porque $g(c) < 0$ e $f(c) > 0$.

Como a função $\frac{g}{f}$ é contínua em $[b\ ,\ c]$ e $\left(\frac{g}{f}\right)(b) \times \left(\frac{g}{f}\right)(c) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, $\exists\, x \in \,]b\ ,\ c[\ :\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0$.

Assim, conclui-se que a função $\frac{g}{f}$ tem pelo menos um zero no intervalo $]b\ ,\ c[$.

Logo, tem pelo menos um zero no intervalo $[b\ ,\ c]$.

IV. $f(x) > 0\ ,\ \forall\, x \in [a\ ,\ b]$ e $g(x) > 0\ ,\ \forall\, x \in [a\ ,\ b]$, logo $(f \times g)(x) > 0\ ,\ \forall\, x \in [a\ ,\ b]$.

A função $f \times g$ não tem zeros no intervalo $[a\ ,\ b]$.

Proposta 24

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $[2\ ,\ 3]$ e em $[-3\ ,\ -2]$.

Sendo f uma função ímpar, sabe-se que $f(2) = -f(-2)$ e que $f(-3) = -f(3)$.

Conclui-se então que:
$f(2) \times f(3) = -f(-2) \times f(3) < 0$ e
$f(-2) \times f(-3) = f(-2) \times (-f(3)) = -f(-2) \times f(3) < 0$.

Como f é contínua em $[2\ ,\ 3]$ e $f(2) \times f(3) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in \,]2\ ,\ 3[\ :\ f(c) = 0$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Como f é contínua em $[-3\,,\,-2]$ e $f(-2)\times f(-3)<0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, d\in\,]-3\,,\,-2[\,:\ f(d)=0$.

Logo, a função tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $]2\,,\,3[$ e outro pertencente ao intervalo $]-3\,,\,-2[$.

Proposta 25

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m_t=2$. Como a reta de equação $y=2x$ é assintota do gráfico de f, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$.

A opção correta é a **(B)**.

Pág. 58

Proposta 26

A reta s de equação $y=2$ é assintota do gráfico de g, de domínio $\mathbb{R}^-$, logo $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=m_s=0$.

A opção correta é a **(D)**.

Proposta 27

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\lor(x\leqslant 0\land x-1\neq 0)\}=\mathbb{R}$

Assintotas verticais

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{x-1}=-1$

A reta de equação $x=0$ é assintota vertical do gráfico de f porque $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, o seu gráfico não admite mais assintotas verticais.

Assintotas não verticais

Quando $x\longrightarrow-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x(x-1)}=\frac{0}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x-1}-0x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=\frac{0}{-\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x\longrightarrow-\infty$.

Quando $x\longrightarrow+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-0x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$$

Como $b\notin\mathbb{R}$, conclui-se que não existe assintota não vertical quando $x\longrightarrow+\infty$.

Conclusão: O gráfico da função f admite duas assintotas, as retas de equações $x=0$ e $y=0$.

Proposta 28

O gráfico da função $f(x)=g(-x)$ pode ser obtido do gráfico da função g através de uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas.

Assintotas do gráfico da função f: $x=-2$ e $y=-2x$.

A opção correta é a **(B)**.

Proposta 29

1. O gráfico de f não admite assintotas verticais porque a função é contínua e tem domínio $\mathbb{R}$.

2. $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}+2x-2x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x})=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Conclui-se que o gráfico de f tem pelo menos uma assintota oblíqua $(y=2x)$.

Pág. 59

Proposta 30

1. Como $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-3)=0$, conclui-se que as retas de equações $x=1$ e $y=x+3$ são as assintotas do gráfico de f.

$$\begin{cases}x=1\\y=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$$

As assintotas do gráfico de f intersetam-se no ponto $P(1\,,\,4)$.

2. $y=x+3$ é assintota do gráfico de f, logo sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ e que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=3$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5-x\,f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x^2}-\frac{x\,f(x)}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x^2}-\frac{f(x)}{x}\right)=0-1=-1$$

Proposta 31

1. $$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{x}{x+1}>0\land x+1\neq0\right\}=$$

$$=\,]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]0\,,\,+\infty[$$

$$\frac{x}{x+1}>0\Leftrightarrow(x>0\land x+1>0)\lor(x<0\land x+1<0)$$

$$\Leftrightarrow(x>0\land x>-1)\lor(x<0\land x<-1)$$

$$\Leftrightarrow x>0\lor x<-1$$

2. **Assintotas verticais**

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)=-\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)=+\infty$$

As retas de equações $x=0$ e $x=-1$ são assintotas verticais do gráfico de f.

Assintotas horizontais

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)=\ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}\right)\right)=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)\right)=\ln 1=0$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

A reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$ e quando $x \longrightarrow +\infty$.

Conclusão: o gráfico de f apenas admite apenas assintotas paralelas aos eixos coordenados.

3. $u_n = n\,f(n) = n \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n} = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n} =$

$= \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

$\lim u_n = \lim\left[\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right] = \ln\left[\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right] =$

$= \ln\left[\lim\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}\right] = \ln\left(e^{-1}\right) = -1$

Proposta 32

1. $g(a) = \ln 5 \iff \ln\left(\dfrac{2a^2 + a}{3}\right) = \ln 5 \iff \dfrac{2a^2 + a}{3} = 5$

$\iff 2a^2 + a - 15 = 0 \iff a = \dfrac{5}{2} \vee a = -3$

Como $a > 1$, conclui-se que $a = \dfrac{5}{2}$.

$f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{4 \times \frac{5}{2} + 1}{2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}} = \dfrac{11}{15}$, logo $B\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{15}\right)$.

2.1. A função g é contínua no seu domínio porque é a composta entre duas funções contínuas.
Então, g é contínua em $[5, 6]$.

$g(5) = \ln\left(\dfrac{2 \times 5^2 + 5}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{55}{3}\right) \approx 2{,}91$ e

$g(6) = \ln\left(\dfrac{2 \times 6^2 + 6}{3}\right) = \ln(26) \approx 3{,}26$

Como g é contínua em $[5, 6]$ e $g(5) < \pi < g(6)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, a \in \,]5, 6[\, : g(a) = \pi$.

Então, existe um $a \in \,]5, 6[$ para o qual a área colorida da figura é igual a π.

2.2. Sabe-se que $\overline{AD} = a - 1$, $\overline{AB} = f(a) = \dfrac{4a + 1}{2a^2 + a}$ e $\overline{CD} = f(1) = \dfrac{5}{3}$.

Como a função h a cada valor de a, $a > 1$, faz corresponder a área do trapézio $[ABCD]$, então:

$h(a) = \dfrac{\frac{5}{3} + \frac{4a + 1}{2a^2 + a}}{2} \times (a - 1) = \dfrac{\frac{10a^2 + 5a + 12a + 3}{6a^2 + 3a}}{2} \times (a - 1) =$

$= \dfrac{10a^2 + 17a + 3}{12a^2 + 6a} \times (a - 1) =$

$= \dfrac{10a^3 + 17a^2 + 3a - 10a^2 - 17a - 3}{12a^2 + 6a} =$

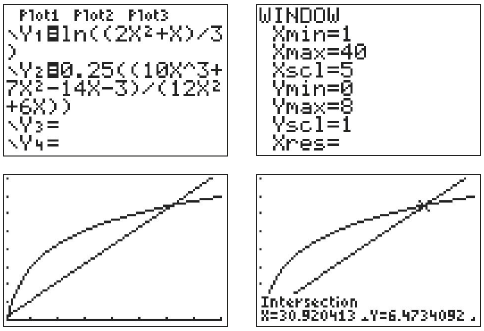
$= \dfrac{10a^3 + 7a^2 - 14a - 3}{12a^2 + 6a} =$

$= \dfrac{(10a^2 + 17a + 3) \times (a - 1)}{12a^2 + 6a} =$

$= \dfrac{(10a^2 + 17a + 3) \times (a - 1)}{12a^2 + 6a} =$

$= \dfrac{10a^3 + 17a^2 + 3a - 10a^2 - 17a - 3}{12a^2 + 6a} = \dfrac{10a^3 + 7a^2 - 14a - 3}{12a^2 + 6a}$

3. A equação que traduz o problema é $g(a) = 0{,}25\,h(a)$.
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



Logo, conclui-se que $a \approx 30{,}92$.

PARA AVALIAR 2

Parte 1 – Questões de escolha múltipla

Pág. 60

1. Por observação gráfica conclui-se que se $\lim g(u_n) = -\infty$, então $\lim (u_n) = 2^-$.
O termo geral de (u_n) pode ser $u_n = \dfrac{2n^2}{n^2 + 1}$.
A opção correta é a **(D)**.

2.1. Como f é uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ e a reta de equação $y = -3$ é assintota do seu gráfico, sabe-se que

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$. Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} = \dfrac{-\infty}{-3} = +\infty$.

A opção correta é a **(A)**.

2.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{e^{-x}} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$. A opção correta é a **(B)**.

3. O gráfico da função $g(x) = f(-x)$ pode ser obtido do gráfico da função f através de uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas.
Se a reta de equação $y = x + 3$ é a única assintota do gráfico de f então a única assintota do gráfico de g é a reta de equação $y = -x + 3$.
A opção correta é a **(A)**.

4. Sendo as retas de equações $x = -1$ e $y = 2x - 1$ as assintotas do gráfico de f, de domínio $]-1, +\infty[$, então

sabe-se que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$.

A opção correta é a **(C)**.

5. Como $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$, conclui-se que não existe $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$. Logo, a função h não é contínua em $x = 0$, o que permite excluir as opções **(A)** e **(D)** pois a função h não é contínua nos intervalos $[-1, 1]$ e $[0, 1]$.

$h(1) = \dfrac{1}{3} - 2\ln 1 = \dfrac{1}{3}$ e $h(2) = \dfrac{2}{3} - 2\ln 2 \approx -0{,}72$, logo, o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função h no intervalo $]1, 2[$ porque h é contínua em $[1, 2]$ e $h(1) \times h(2) < 0$.
A opção correta é a **(B)**.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Parte 2 – Questões de desenvolvimento

Pág. 61

1.1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-\sqrt{2-x}}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\left(1-\sqrt{2-x}\right)\left(1+\sqrt{2-x}\right)}{(x-1)\left(1+\sqrt{2-x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-(2-x)}{(x-1)\left(1+\sqrt{2-x}\right)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)\left(1+\sqrt{2-x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2}$

f é contínua à esquerda de 1 porque $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$.

1.2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^3-x}{x^2+x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x(x^2-1)}{(x-1)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x(x+1)}{x+2} = \frac{2}{3}$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, conclui-se que não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

A função f não é contínua em $x = 1$ porque não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

1.3. Por exemplo, a função g definida por $g(x) = \frac{1}{2x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f \times g)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) \times g(x)\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-x}{x^2+x-2} \times \frac{1}{2x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-x}{2x^3+2x^2-4x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$

2.1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$ porque é a diferença entre duas funções contínuas (uma linear e outra exponencial).

Então, f é contínua em $[0\,,\,1]$.

$f(0) = 0 - e^0 = -1$ e $f(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}632$

Como f é contínua em $[0\,,\,1]$ e $f(0) \times f(1) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in \,]0\,,\,1[\, : f(c) = 0$.

Assim, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução pertencente ao intervalo $]0\,,\,1[$.

2.2. **Assintotas verticais**

Como $D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assintotas verticais.

Assintotas não verticais

Quando $x \to -\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} \left(1 - \frac{e^y}{-y}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{e^y}{y}\right) = +\infty$

Mudança de variável:

Fazendo $-x = y$, vem $y = -x$.

Se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$.

Como $m \notin \mathbb{R}$, conclui-se que não existe assintota não vertical quando $x \to -\infty$.

Quando $x \to +\infty$:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) =$

$= 1 - \frac{0}{+\infty} = 1 - 0 = 1$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^{-x} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x}) = 0$

A reta de equação $y = x$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Conclusão: o gráfico da função f admite uma única assintota, a reta de equação $y = x$.

3.1.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 1 + \ln x \neq 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq e^{-1}\} = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$

3.1.2. **Assintotas verticais**

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{1+\ln x} = \frac{2}{1+(-\infty)} = \frac{2}{-\infty} = 0$

A reta de equação $x = 0$ não é assintota vertical do gráfico de f .

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} \frac{2}{1+\ln x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ e

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^+} \frac{2}{1+\ln x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

A reta de equação $x = \frac{1}{e}$ é assintota vertical do gráfico de f .

Assintota horizontal

Só faz sentido averiguar a existência de assintota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$ porque $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{1+\ln x} = \frac{2}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f .

Conclusão: o gráfico da função f admite duas assintotas, as retas de equações $x = \frac{1}{e}$ e $y = 0$.

3.2. Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - x$.

g é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$ por ser a diferença entre duas funções contínuas.

Em particular, é contínua em $\left[1\,,\,\sqrt{e}\right]$.

$g(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1$ e

$g\left(\sqrt{e}\right) = f\left(\sqrt{e}\right) - \sqrt{e} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} - \sqrt{e} = \frac{4}{3} - \sqrt{e} < 0$

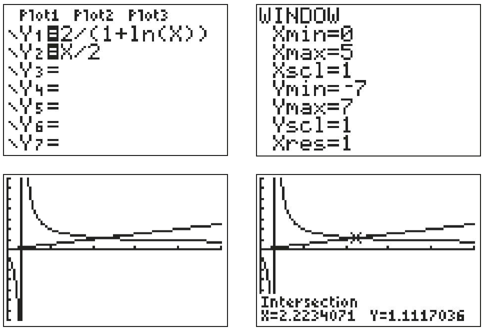
Como g é contínua em $\left[1\,,\,\sqrt{e}\right]$ e $g(1) \times g\left(\sqrt{e}\right) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in \left]1\,,\,\sqrt{e}\right[: g(c) = 0$.

Então, a equação $f(x) - x = 0$, ou seja, $f(x) = x$, é possível em $\left]1\,,\,\sqrt{e}\right[$.

Logo, o gráfico da função f interseta a bissetriz dos quadrantes ímpares num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]1\,,\,\sqrt{e}\right[$.

3.3. O problema pode ser traduzido pela condição
$\exists\, x \in D_f :\ f(x) = \frac{x}{2}$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:



Logo, conclui-se que $x \approx 2{,}22$.

4. Sendo f e g duas funções contínuas em $[a\,,\ b]$, a função $h = f - g$ também é contínua em $[a\,,\ b]$ por ser a diferença entre duas funções contínuas.

$h(a) = (f - g)(a) = f(a) - g(a) < 0$ porque $f(a) < g(a)$.

$h(b) = (f - g)(b) = f(b) - g(b) > 0$ porque $f(b) > g(b)$.

Como a função h é contínua em $[a\,,\ b]$ e $h(a) \times h(b) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, $\exists\, c \in\,]a\,,\ b[\ :\ h(c) = 0$.

Assim, conclui-se que a função $h = f - g$ tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $]a\,,\ b[$.

Pág. 62

Tarefa 11

1.1. $d(t) = 88 \Leftrightarrow -2t^2 + 90t = 88 \Leftrightarrow -2t^2 + 90t - 88 = 0$
$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 44$

Como $0 \leqslant t \leqslant 5$, conclui-se que $t = 1$.

$d(t) = 212{,}5 \Leftrightarrow -2t^2 + 90t = 212{,}5$
$\Leftrightarrow -2t^2 + 90t - 212{,}5 = 0 \Leftrightarrow t = 2{,}5 \vee t = 42{,}5$

Como $0 \leqslant t \leqslant 5$, conclui-se que $t = 2{,}5$.

A situação representada em **I** ocorreu às 10 h e a situação descrita em **II** ocorreu às 11 h 30 min .

1.2. $d(t) = 252 \Leftrightarrow -2t^2 + 90t = 252 \Leftrightarrow -2t^2 + 90t - 252 = 0$
$\Leftrightarrow t = 3 \vee t = 42$

Como $0 \leqslant t \leqslant 5$, conclui-se que $t = 3$; $v = \frac{252}{3} = 84$ km/h .
A velocidade média foi de 84 km/h .

1.3. Não, porque na figura **IV** o conta-quilómetros marca 352,8 km e $d(5) = 400$.

2. $\frac{d(2) - d(0)}{2} = \frac{172 - 0}{2} = 86$

Significa que, nas duas primeiras horas de viagem, o Ricardo percorreu, em média, 86 km por hora.

3. $\frac{d(5) - d(3)}{2} = \frac{400 - 252}{2} = 74$ e $\frac{d(5) - d(0)}{5} = \frac{400 - 0}{5} = 80$

A afirmação é falsa. A velocidade média nas duas últimas horas de percurso é de 74 km/h e de todo o percurso é de 80 km/h .

4. $\text{t.m.v.}_{[1\,,\ 4]} = \frac{d(4) - d(1)}{4 - 1} = \frac{328 - 88}{3} = 80$ km/h

5. $\lim\limits_{t \to 1} \frac{d(t) - d(1)}{t - 1} = \lim\limits_{t \to 1} \frac{-2t^2 + 90t - 88}{t - 1} =$

$= \lim\limits_{t \to 1} \frac{-2(t - 1)(t - 44)}{t - 1} = \lim\limits_{t \to 1} (-2t + 88) = 86$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{d(4 + h) - d(4)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-2(4 + h)^2 + 90(4 + h) - 328}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-32 - 16h - 2h^2 + 360 + 90h - 328}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-2h^2 + 74h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(-2h + 74)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (-2h + 74) = 74$

No instante em que tinha decorrido 1 h de viagem, a velocidade era de 86 km/h e no instante em que tinham decorrido 4 h a velocidade era de 74 km/h .

6. Não. No instante em que se completaram duas horas de viagem a velocidade era de 82 km/h .

$\lim\limits_{t \to 2} \frac{d(t) - d(2)}{t - 2} = \lim\limits_{t \to 2} \frac{-2t^2 + 90t - 172}{t - 2} =$

$= \lim\limits_{t \to 2} \frac{-2(t - 2)(t - 43)}{t - 2} = \lim\limits_{t \to 2} (-2t + 86) = 82$

Pág. 64

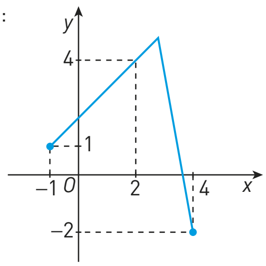
70.1. $\text{t.m.v.}_{[0\,,\ 4]} = \frac{C(4) - C(0)}{4 - 0} = \frac{2{,}76 - 3}{4} = -0{,}06$ €/mês

Nos primeiros quatro meses as ações desvalorizaram, em média, 0,06 € por mês.

70.2. $\text{t.m.v.}_{[4\,,\ 6]} = \frac{C(6) - C(4)}{6 - 4} = \frac{2{,}76 - 2{,}76}{2} = 0$

A afirmação é falsa. Apenas se pode afirmar que a cotação das ações no final do 4.º e do 6.º mês é a mesma.

71. Por exemplo:



72. $\text{t.m.v.}_{[x_0\,,\ x_1]} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1 + b - ax_0 - b}{x_1 - x_0} =$

$= \frac{ax_1 - ax_0}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a$

Pág. 65

73. A afirmação **I** é falsa. Se $\text{t.m.v.}_{[a\,,\ b]} > 0$ apenas se pode concluir que $f(b) > f(a)$.

A afirmação **II** é verdadeira. Se f é crescente em $[a\,,\ b]$ então $f(b) > f(a)$. Logo, $\text{t.m.v.}_{[a\,,\ b]} > 0$.

A afirmação **III** é verdadeira. Se f é injetiva em $[a\,,\ b]$ então $f(b) \neq f(a)$. Logo, $\text{t.m.v.}_{[a\,,\ b]} \neq 0$.

74.1. $f(5) - f(3) = f(3 + 2) - f(3) = 2^2 + 6 \times 2 = 16$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

74.2. $\text{t.m.v.}_{[3\,,\,5]} = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{16}{2} = 8$

74.3. $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 6h}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h + 6)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h + 6) = 6$

74.4. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(3\,,\,1)$.

$t:\ y = mx + b$ e $m_t = f'(3) = 6$

O ponto $P(3\,,\,1)$ pertence à reta t, logo

$1 = 6 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -17$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y = 6x - 17$.

75.1.1. Sendo $g(x) = f(x - 1)$, então $g'(x) = f'(x - 1)$.

Assim, $g'(5) = f'(4) = 1$.

75.1.2. Sendo $h(x) = f(-x)$, então $h'(x) = -f'(-x)$.

Assim, $h'(-4) = -f'(4) = -1$.

75.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 5.

$t:\ y = mx + b$ e $m_t = g'(5) = 1$

O ponto $P(5\,,\,g(5))$, ou seja, $P(5\,,\,2)$, pertence à reta t, logo $2 = 1 \times 5 + b \Leftrightarrow b = -3$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y = x - 3$.

Pág. 67

Tarefa 12

1. 4000 rotações por minuto corresponde a $r = 40$ e 5000 rotações por minuto corresponde a $r = 50$.

$D(50) - D(40) = \dfrac{123 \times 50 - 1350}{50 + 30} - \dfrac{123 \times 40 - 1350}{40 + 30} =$

$= 60 - 51 = 9$

Na passagem de 4000 para 5000 rotações por minuto há um acréscimo de 9 decibéis do nível de ruído.

2. Determinar a variação média do nível de ruído quando o funcionamento do motor passa de 5000 para 7500 rotações por minuto, equivale a calcular a taxa média de variação do nível de ruído no intervalo $[50\,,\,75]$.

$\text{t.m.v.}_{[50\,,\,75]} = \dfrac{D(75) - D(50)}{75 - 50} =$

$= \dfrac{\dfrac{123 \times 75 - 1350}{75 + 30} - \dfrac{123 \times 50 - 1350}{50 + 30}}{25} = \dfrac{75 - 60}{25} = 0{,}6$

A variação média do nível de ruído na passagem de 5000 rotações para 7500 rotações por minuto é de $0{,}6$ decibéis por cada 100 rotações.

3. A determinação da taxa de variação do nível de ruído no instante em que o motor funciona a 4000 rotações por minuto corresponde ao cálculo da derivada da função D quando $r = 40$.

$D'(40) = \lim\limits_{r \to 40} \dfrac{D(r) - D(40)}{r - 40} = \lim\limits_{r \to 40} \dfrac{\dfrac{123r - 1350}{r + 30} - 51}{r - 40} =$

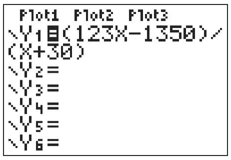
$= \lim\limits_{r \to 40} \dfrac{\dfrac{123r - 1350 - 51r - 1530}{r + 30}}{r - 40} = \lim\limits_{r \to 40} \dfrac{72r - 2880}{(r - 40)(r + 30)} =$

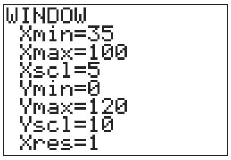
$= = \lim\limits_{r \to 40} \dfrac{72(r - 40)}{(r - 40)(r + 30)} = \lim\limits_{r \to 40} \dfrac{72}{r + 30} = \dfrac{72}{70} \approx 1{,}03$

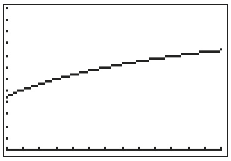
No momento em que o motor funciona a 4000 rotações por minuto, a taxa de variação do nível de ruído é de, aproximadamente, $1{,}03$ decibéis por cada cem rotações.

4. O domínio da função é o intervalo $[35\,,\,100]$.

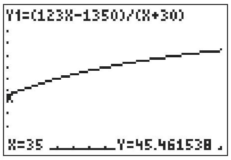
Uma representação gráfica da função obtida na calculadora, após a escolha da janela de visualização adequada à situação, é a seguinte:

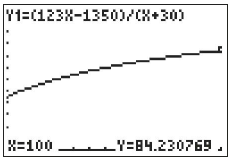






Determinação de alguns valores relevantes:

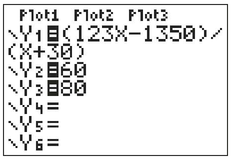


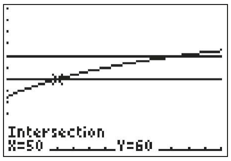


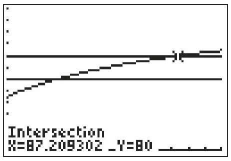
$D(35) \approx 45$ e $D(100) \approx 84$

Em seguida vamos determinar r de modo que $D(r) = 60$ e de modo que $D(r) = 80$.

Para tal, basta recorrer à interseção da função D com cada uma das seguintes funções: $y = 60$ e $y = 80$.







Com os valores obtidos é possível construir uma tabela com a classificação do nível de ruído em função dos valores de rotações por minuto, como, por exemplo, a que é apresentada em seguida.

Nível de ruído	Rotações/min
Moderado	3500-5000
Alto	5000-8721
Muito alto	8721-10 000

5. A condição que traduz o problema é:

$D(r) \leqslant 80 \wedge r \in [35\,,\,100]$

$\Leftrightarrow \dfrac{123r - 1350}{r + 30} \leqslant 80 \wedge r \in [35\,,\,100]$

$\Leftrightarrow \dfrac{123r - 1350 - 80r - 2400}{r + 30} \leqslant 0 \wedge r \in [35\,,\,100]$

$\Leftrightarrow \dfrac{43r - 3750}{r + 30} \leqslant 0 \wedge r \in [35\,,\,100]$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$\Leftrightarrow \; 43r - 3750 \leqslant 0 \wedge r \in [35\,,\ 100]$

$\Leftrightarrow \; r \leqslant \frac{3750}{43} \wedge r \in [35\,,\ 100] \Leftrightarrow r \in \left[35\,,\ \frac{3750}{43}\right]$

Como $\frac{3750}{43} \approx 87$, para cumprir a exigência, o número de rotações por minuto não deve exceder 8720 .

Pág. 68

Tarefa 13

1.1. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{V(4) - V(1)}{3} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 4^3 - \frac{4}{3}\pi \times 1^3}{3} =$$

$$\frac{\frac{256}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi}{3} = \frac{\frac{252}{3}\pi}{3} = \frac{252}{9}\pi = 28\pi$$

Quando o raio aumenta de 1 para 4 , o volume aumenta, em média, 28π unidades de volume por unidade de comprimento.

1.2. $V'(1) = \lim\limits_{r \to 1} \frac{V(r) - V(1)}{r-1} = \lim\limits_{r \to 1} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi}{r-1} =$

$$= \lim_{r \to 1} \frac{\frac{4}{3}\pi (r^3 - 1)}{r-1} = \lim_{r \to 1} \frac{\frac{4}{3}\pi (r-1)(r^2 + r + 1)}{r-1} =$$

$$= \lim_{r \to 1} \left[\frac{4}{3}\pi (r^2 + r + 1)\right] = \frac{4}{3}\pi \times 3 = 4\pi$$

Para um acréscimo de uma unidade no raio, naquele instante corresponderia um aumento de 4π unidades no volume.

2.1. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 3}{2} = \frac{1}{2}$, $g(2) = \frac{1}{2}$ e

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2^+} \frac{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)\left(\sqrt{x-1} + 1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 1 - 1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1} + 1\right)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{2}$$

A função g é contínua em $x = 2$ porque

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = g(2)$.

2.2. $g'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\frac{x^2-3}{2} - \frac{1}{2}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\frac{x^2-4}{2}}{x-2} =$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x+2}{2} = 2$$

$$g'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} - \frac{1}{2}}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{2\sqrt{x-1} - 2 - x + 2}{2(x-2)}}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2\sqrt{x-1} - x}{2(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\left(2\sqrt{x-1} - x\right)\left(2\sqrt{x-1} + x\right)}{2(x-2)^2\left(2\sqrt{x-1} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4(x-1) - x^2}{2(x-2)^2\left(2\sqrt{x-1} + x\right)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{2(x-2)^2\left(2\sqrt{x-1} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{2(x-2)^2\left(2\sqrt{x-1} + x\right)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{2\left(2\sqrt{x-1} + x\right)} = -\frac{1}{8}$$

Não existe $g'(2)$ porque $g'(2^-) \neq g'(2^+)$.

2.3. $g'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{x^2-3}{2} + 1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{x^2-1}{2}}{x-1} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2} = 1$$

2.4. Seja t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 .

$t: \; y = mx + b$ e $m_t = g'(-1)$

$$g'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{x^2-3}{2} + 1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\frac{x^2-1}{2}}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{2} = -1$$

O ponto $P\left(-1\,,\ g(-1)\right)$, ou seja, $P(-1, -1)$, pertence à reta t , logo $-1 = -1 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = -2$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y = -x - 2$.

3.1. $T(0) = \frac{72}{4} = 18$.

No momento em que o Pedro introduziu o refrigerante no frigorífico, a temperatura ambiente era de 18 °C .

3.2. $T(1) - T(0) = \frac{4 + 17 + 72}{1 + 4 + 4} - 18 = \frac{93}{9} - 18 = -\frac{23}{3}$ e

$$T(2) - T(1) = \frac{16 + 34 + 72}{4 + 8 + 4} - \frac{93}{9} = \frac{61}{8} - \frac{31}{3} = -\frac{65}{24}$$

O arrefecimento foi maior durante a primeira hora porque

$|T(1) - T(0)| > |T(2) - T(1)|$.

3.3. $\text{t.m.v.}_{[0\,,\ 2]} = \frac{T(2) - T(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{61}{8} - 18}{2} = -5{,}1875$

A taxa média de variação da temperatura nas duas primeiras horas de arrefecimento foi igual a $-5{,}1857$ °C/h .

3.4. $T'(2) = \lim\limits_{t \to 2} \frac{T(t) - T(2)}{t-2} = \lim\limits_{t \to 2} \frac{\frac{4t^2 + 17t + 72}{t^2 + 4t + 4} - \frac{61}{8}}{t-2} =$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{\frac{32t^2 + 136t + 576 - 61t^2 - 244t - 244}{8(t^2 + 4t + 4)}}{t-2} =$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{-29t^2 - 108t + 332}{8(t^2 + 4t + 4)(t-2)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(-29t - 166)}{8(t^2 + 4t + 4)(t-2)} =$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{-29t - 166}{8(t^2 + 4t + 4)} = \frac{-224}{128} = -1{,}75$$

A taxa de variação no instante $t = 2$ é igual a $-1{,}75$ °C/h .

3.5. $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{4t^2 + 17t + 72}{t^2 + 4t + 4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{4t^2}{t^2} = 4$

Se o Pedro deixar o refrigerante no frigorífico durante muito tempo vai bebê-lo a uma temperatura de 4 °C .

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 69

76.1. $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x+1) = 0$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0$ e $g(1) = 0$

Logo, a função g é contínua em $x = 1$.

76.2. $g'(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1-0}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$

$g'(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x+1-0}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$

Não existe derivada em $x = 1$ porque $g'(1^-) \neq g'(1^+)$.

77.1.1. $f'(5^-) = m_{t_1} = \dfrac{6-2}{0-5} = -\dfrac{4}{5}$

77.1.2. $f'(5^+) = m_{t_2} = \dfrac{2-0}{5-4} = 2$

77.2. A função não é derivável em $x = 5$ porque $f'(5^-) \neq f'(5^+)$.

77.3. Como $f'(-10) = 2$, a função é contínua em $x = -10$ porque toda a função derivável num ponto do seu domínio é contínua nesse ponto.

Pág. 70

78.1. Como $f'(3) = 2$ conclui-se que a função f é contínua em $x = 3$.

Então, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 1$.

78.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3.

$t: \; y = mx + b$ e $m_t = f'(3) = 2$

O ponto $P(3, 1)$ pertence à reta t, logo

$1 = 2 \times 3 + b \iff b = -5$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y = 2x - 5$.

78.3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{(x-3)(x+3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} \times \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x+3} = f'(3) \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Pág. 71

79.1. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$, logo não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Como não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, a função f é descontínua em $x = 2$.

79.2. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4-2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

79.3. Por observação do gráfico conclui-se que $f'(2^-) \in \mathbb{R}^+$.

Pela alínea anterior sabe-se que $f'(2^+) = +\infty$.

Logo, conclui-se que as derivadas laterais em $x = 2$ são diferentes.

80.1.1. $f'(3^-) = +\infty$

80.1.2. $f'(3^+) = +\infty$

80.1.3. $f'(5^-) = +\infty$

80.1.4. $f'(5^+) = -\infty$

80.2.1. Por observação gráfica, e atendendo às inclinações das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas $\dfrac{7}{2}$ e 2, conclui-se que $f'\left(\dfrac{7}{2}\right) > 0$ e $f'(2) < 0$.

Logo, $f'\left(\dfrac{7}{2}\right) \times f'(2) < 0$.

80.2.2. Por observação gráfica, conclui-se também que

$f'(2) < f'(1)$ e $f'(4) > 0$.

Logo, $f'(2) - f'(1) < 0$ e $\dfrac{f'(2) - f'(1)}{f'(4)} < 0$.

Pág. 72

81.1. $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{2}{1+h+1} - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{2-h-2}{h+2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h(h+2)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{h+2} = -\dfrac{1}{2}$

81.2. $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h+1)^2 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 6h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h+6)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (h+6) = 6$

81.3. $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{3+h}{3+h+1} - \frac{3}{4}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{3+h}{h+4} - \frac{3}{4}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{12+4h-3h-12}{4h+16}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h(4h+16)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{4h+16} = \dfrac{1}{16}$

81.4. $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{1+2h+h^2} - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1-1-2h-h^2}{1+2h+h^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h-h^2}{h(1+2h+h^2)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(-2-h)}{h(1+2h+h^2)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2-h}{1+2h+h^2} = -2$

81.5. $f'(-3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1+3-h} - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(\sqrt{4-h} - 2)(\sqrt{4-h} + 2)}{h(\sqrt{4-h} + 2)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4-h-4}{h(\sqrt{4-h} + 2)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h(\sqrt{4-h} + 2)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{4-h} + 2} = -\dfrac{1}{4}$

82.1. O ponto P tem abcissa 1 e pertence à reta t; logo, a sua ordenada é dada por $y = 6 \times 1 - 4$, ou seja, igual a 2.

82.2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = m_t = 6$

82.3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x}$

$= f'(1) \times 1 = 6$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 73

83. Sabe-se que uma função não é derivável nos pontos "angulosos" e nos pontos de descontinuidade; logo, o domínio da função derivada de f é $[-3\,,\,5[\setminus\{-1\,,\,3\}$.

84.1. O domínio da função f é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Seja $a \neq 0$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a^2 + 2ah + h^2} - \frac{1}{a^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a^2 - a^2 - 2ah - h^2}{a^4 + 2a^3h + a^2h^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2ah - h^2}{h\,(a^4 + 2a^3h + a^2h^2)} = \lim_{h \to 0} \frac{h\,(-2a - h)}{h\,(a^4 + 2a^3h + a^2h^2)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2a - h}{a^4 + 2a^3h + a^2h^2} = \frac{-2a}{a^4} = -\frac{2}{a^3}$$

Assim, a função derivada de f é definida por

$$f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -\frac{2}{x^3}$$

84.2. O domínio da função f é $\mathbb{R}$.

Seja $a > 1$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(a+h) - 1 - (2a - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2a + 2h - 1 - 2a + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Seja $a < 1$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\,(2a + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a$$

Seja $a = 1$; então:

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h\,(2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (2 + h) = 2$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2\,(1+h) - 1 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2 + 2h - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

Como $f'(1^-) = f'(1^+) = 2$ então a função é derivável em $x = 1$ e $f'(1) = 2$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

84.3. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leqslant 2 \\ -2 + x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Seja $a > 2$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2 + a + h - (-2 + a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 + a + h + 2 - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Seja $a < 2$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - (a+h) - (2 - a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 - a - h - 2 + a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Seja $a = 2$; então:

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2 - (2+h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-2 + 2 + h - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Como $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ a função não é derivável em $x = 2$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f' : \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x > 2 \\ -1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

84.4. O domínio da função f é $\mathbb{R}$. Seja $a > 2$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a + h - 1} - \sqrt{a - 1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{a+h-1} - \sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}\right)}{h\left(\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a + h - 1 - a + 1}{h\left(\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}} = \frac{1}{2\sqrt{a-1}}$$

Seja $a < 2$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(a+h)^2}{2} + a + h - \left(\frac{a^2}{2} + a\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a^2 + 2ah + h^2}{2} + a + h - \frac{a^2}{2} - a}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2ah + h^2 + 2h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 + 2h}{2h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\,(2a + h + 2)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{2a + h + 2}{2} = a + 1$$

Seja $a = 2$; então:

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{(2+h)^2}{2} + 2 + h - 0}{h} =$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{4+2h+h^2}{2}+2+h}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{4+2h+\dfrac{h^2}{2}}{h} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{2+h-1}-0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-0}{h} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como $f'(2^-) = -\infty$ e $f'(2^+) = +\infty$, a função não é derivável em $x = 2$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f': \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 2 \\ x+1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

84.5. O domínio da função f é $\mathbb{R}$. Seja $a > 0$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(a+h)^2-(a+h)-(3a^2-a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3a^2+6ah+3h^2-a-h-3a^2+a}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6ah+3h^2-h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6a+3h-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (6a+3h-1) = 6a-1$$

Seja $a < 0$; então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{a+h}{|a+h-1|}-\dfrac{a}{|a-1|}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{a+h}{-a-h+1}-\dfrac{a}{-a+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-a^2-ah+a+h+a^2+ah-a}{h(-a-h+1)(-a+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(-a-h+1)(-a+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(-a-h+1)(-a+1)} = \frac{1}{(-a+1)^2} = \frac{1}{(a-1)^2}$$

Seja $a = 0$; então:

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{h}{|h-1|}-0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{h}{-h+1}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{-h+1} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f()}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3h^2-h-0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(3h-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} (3h-1) = -1$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, a função não é derivável em $x = 0$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f': \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 6x-1 & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Pág. 74

Tarefa 14

1. A representação gráfica que corresponde à representação gráfica da função f' é a que consta da opção **(B)**.

A representação gráfica indicada na opção **(A)** não é uma função.

Os declives das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa negativa são positivos, donde se conclui que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^-$. Então, a representação gráfica não pode ser a indicada na opção **(C)**.

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero é horizontal, logo conclui-se que $f'(0) = 0$.

Assim sendo, a representação gráfica indicada na opção **(D)** não corresponde à representação gráfica da função derivada de f porque nesse caso $f'(0) > 0$.

2. A representação gráfica que corresponde à representação gráfica de f é a que consta da opção **(A)**.

Seja a a abcissa do ponto onde a função f não é derivável.

Como o domínio da função derivada é $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, sendo $a > 0$, então rejeitam-se as opções **(C)** e **(D)** pois, no caso da função representada em **(C)**, não existe derivada no ponto de abcissa zero e no caso da situação **(D)** não existe derivada num ponto de abcissa negativa.

No caso da função representada em **(D)**, a função é estritamente crescente nos pontos de abcissa inferior a a. Então, a função derivada é positiva nesses pontos, o que não corresponde à situação dada.

Pág. 75

85.1. $f'(x) = \left(\dfrac{x}{2}+1\right)' = \dfrac{1}{2}$

85.2. $f'(x) = \left(-x^3+\dfrac{x^2}{2}-3\right)' = -3x^2+x$

85.3. $f'(x) = (-2x^3+5x^2-x+7)' = -6x^2+10x-1$

85.4. $f'(x) = \left(\dfrac{3x^3-x}{2}+\sqrt{5}x\right)' = \dfrac{9}{2}x^2-\dfrac{1}{2}+\sqrt{5}$

86.1. Seja t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

$t: y = mx + b$ e $m_t = g'(1)$

$g'(x) = (x^2+4x)' = 2x+4$, logo $m_t = 6$.

Como $g(1) = 5$, o ponto $P(1\,,\,5)$ pertence à reta t, logo:

$5 = 6 \times 1 + b \iff b = -1$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y = 6x - 1$.

86.2. Seja r a reta tangente ao gráfico de g que é paralela ao eixo das abcissas.

$r: y = mx + b$ e $m_r = 0$

$g'(x) = 0 \iff 2x + 4 = 0 \iff x = -2$

Como $g(-2) = -4$, o ponto $P(-2\,,\,-4)$ pertence à reta r, logo $b = -4$.

Assim, a reta r é definida pela equação $y = -4$.

87.1. Como a reta t é tangente ao gráfico de f nos pontos de abcissa 1 e de abcissa a, sabe-se que:

$f'(1) = f'(a) = m_t = -\dfrac{2}{5}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$g'(x) = (-2x^2 + 3x)' = -4x + 3$, logo $g'(1) = -4 + 3 = -1$.

Então, tem-se $(g + f)'(1) = g'(1) + f'(1) = -1 + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{7}{5}$

87.2. $(g + f)'(a) = -\frac{87}{5} \Leftrightarrow g'(a) + f'(a) = -\frac{87}{5}$

$\Leftrightarrow -4a + 3 + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{87}{5} \Leftrightarrow -4a + 3 + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{87}{5}$

$\Leftrightarrow -4a = -20 \Leftrightarrow a = 5$

Pág. 76

88.1. $f'(x) = \left[-2x\left(\frac{3x}{2} - 1\right)\right]' = (-2x)' \times \left(\frac{3x}{2} - 1\right) + (-2x) \times \left(\frac{3x}{2} - 1\right)' =$

$= -2 \times \left(\frac{3x}{2} - 1\right) + (-2x) \times \frac{3}{2} = -6x + 2$

88.2. $g'(x) = \left[4\left(\frac{x^3}{4} - 2x + 1\right)\right]' =$

$= (4)' \times \left(\frac{x^3}{4} - 2x + 1\right) + 4 \times \left(\frac{x^3}{4} - 2x + 1\right)' =$

$= 0 + 4\left(\frac{3x^2}{4} - 2\right) = 3x^2 - 8$

88.3. $h'(x) = \left[(1 - x^2)\left(\frac{x^3 - 1}{2}\right)\right]' = (1 - x^2)'\left(\frac{x^3 - 1}{2}\right) + (1 - x^2)\left(\frac{x^3 - 1}{2}\right)' =$

$= -2x\left(\frac{x^3 - 1}{2}\right) + (1 - x^2)\left(\frac{3x^2}{2}\right) = -\frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x$

88.4. $i'(x) = \left[\frac{x^3}{3}(6 - x)(x^2 + 2x)\right]' =$

$= \left(\frac{x^3}{3}\right)'(6 - x)(x^2 + 2x) + \frac{x^3}{3}(6 - x)'(x^2 + 2x) + \frac{x^3}{3}(6 - x)(x^2 + 2x)' =$

$= x^2(6 - x)(x^2 + 2x) + \frac{x^3}{3}(-1)(x^2 + 2x) + \frac{x^3}{3}(6 - x)(2x + 2) =$

$= -2x^5 + \frac{20}{3}x^4 + 16x^3$

89. Como a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 , sabe-se que:

$f'(-1) = m_t = 1$ e $f(-1) = -1 + 3 = 2$

$g'(x) = (-2x^3)' = -6x^2$, logo $g'(-1) = -6 \times (-1)^2 = -6$.

Então, tem-se:

$(f \times g)'(-1) = f'(-1) \times g(-1) + f(-1) \times g'(-1) =$

$= 1 \times 2 + 2 \times (-6) = -10$

90.1. $j'(x) = \left(2r(x)\right)' = 2r'(x)$

Logo, $j'(4) = 2r'(4) = 2\text{tg}(135^o) = 2 \times (-1) = -2$.

90.2. $(r \times s)'(0) = r'(0) \times s(0) + r(0) \times s'(0) = -1 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Pág. 77

91. Como $V(x) = x \times x \times 3x = 3x^3$, logo $V'(x) = (3x^3)' = 9x^2$.

A taxa de variação do volume para $x = 4$ é dada por $V'(4)$, ou seja, é igual a 144 .

92.1. $f'(x) = (x^4)' = 4x^3$

92.2. $f'(x) = \left[\left(\frac{x}{2}\right)^3\right]' = 3 \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times \left(\frac{x}{2}\right)' = 3\left(\frac{x^2}{4}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}x^2$

92.3. $f'(x) = \left[(1 - 2x)^5\right]' = 5 \times (1 - 2x)^4 \times (1 - 2x)' =$

$= 5 \times (1 - 2x)^4 \times (-2) = -10(1 - 2x)^4$

92.4. $f'(x) = \left[(x - 2x^2)^3\right]' = 3 \times (x - 2x^2)^2 \times (x - 2x^2)' =$

$= 3 \times (x - 2x^2)^2 \times (1 - 4x) = (3 - 12x)(x - 2x^2)^2$

93.1. $f'(x) = \frac{(3x - 1)'}{2\sqrt{3x - 1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}}$

93.2. $f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$

93.3. $f'(x) = (2x)' \times \sqrt{x + 1} + 2x \times \left(\sqrt{x + 1}\right)' =$

$= 2 \times \sqrt{x + 1} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} = \frac{3x + 2}{\sqrt{x + 1}}$

93.4. $f'(x) = \frac{(2x - 3)'}{5\sqrt[5]{(2x - 3)^4}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{(2x - 3)^4}}$

Pág. 78

94. Sendo $y = -2x + 5$ uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3 , sabe-se que

$f'(3) = m_{\text{reta}} = -2$ e $f(3) = -2 \times 3 + 5 = -1$.

$g'(x)\left[(f(x))^4\right]' = 4\left(f(x)\right)^3 \times f'(x)$, logo

$g'(3) = 4(f(3))^3 \times f'(3) = 4 \times (-1)^3 \times (-2) = 8$.

95.1. $y' = \left(\frac{3}{x}\right)' = \frac{(3)' \times x - 3 \times (x)'}{x^2} = \frac{0 - 3 \times 1}{x^2} = -\frac{3}{x^2}$

95.2. $y' = \left(-\frac{x}{x - 2}\right)' = -\frac{1 \times (x - 2) - x \times 1}{(x - 2)^2} = -\frac{x - 2 - x}{(x - 2)^2} = \frac{2}{(x - 2)^2}$

95.3. $y' = \frac{2x(x + 3) - x^2 \times 1}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x + 3)^2}$

95.4. $y' = \frac{3(x - 1)^2 - (3x + 1) \times 2(x - 1)}{(x - 1)^4} =$

$= \frac{(x - 1)(3x - 3 - 6x - 2)}{(x - 1)^4} = \frac{-3x - 5}{(x - 1)^3}$

95.5. $y' = 3\left(\frac{1 - x}{2x}\right)^2 \times \left(\frac{1 - x}{2x}\right)' = 3\left(\frac{1 - x}{2x}\right)^2 \times \frac{-1 \times 2x - (1 - x) \times 2}{(2x)^2} =$

$= 3\left(\frac{1 - x}{2x}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{4x^2}\right) = -\frac{3}{2x^2}\left(\frac{1 - x}{2x}\right)^2$

96. $g'(x) = \left[-3(2 - x)^2 + 3\right]' = -6(2 - x) \times (2 - x)' =$

$= -6(2 - x) \times (-1) = 6(2 - x)$

$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$, logo:

$\left(\frac{g}{f}\right)'(1) = \frac{g'(1) \times f(1) - g(1) \times f'(1)}{\left(f(1)\right)^2} =$

$= \frac{6 \times 2 - 0 \times f'(1)}{2^2} = \frac{12 - 0}{4} = 3$

Pág. 79

97.1. $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}_0^+\} =$

$=]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Cálculo auxiliar

$f(x) \in \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow x^2 - 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 9) = \sqrt{x^2 - 9}$

A função $g \circ f$ é definida por:

$$g \circ f:]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 9}$$

97.2. $D_{h \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_h\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$

Cálculo auxiliar

$f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow x^2 - 9 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 10 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{10} \wedge x \neq -\sqrt{10}$

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2 - 9) = \frac{1}{x^2 - 9 - 1} = \frac{1}{x^2 - 10}$

A função $h \circ f$ é definida por:

$$h \circ f: \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 10}$$

97.3. $D_{f \circ h} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_h \wedge h(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \wedge h(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Cálculo auxiliar

$h(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 9$

A função $f \circ h$ é definida por:

$$f \circ h: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} - 9$$

98.1. Por exemplo, $g(x) = x + 1$ e $f(x) = x^2$

98.2. Por exemplo, $g(x) = x - 1$ e $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

98.3. Por exemplo, $g(x) = x^2 - 1$ e $f(x) = e^x$

99.1. $(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(-2) = 3$

99.2. $(f \circ g)(0{,}25) = f(g(0{,}25)) = f(\log_2(0{,}25)) = f(-2) = 3$

100.1. $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}^+ \wedge f(x) \in \mathbb{R}_0^+\} = [1, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$f(x) \in \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}$

A função $g \circ f$ é definida por:

$$g \circ f: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{\ln x}$$

100.2. $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}_0^+ \wedge g(x) \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar

$g(x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x})$

A função $f \circ g$ é definida por:

$$f \circ g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(\sqrt{x})$$

Pág. 80

101. Sendo $h(x) = \frac{x+1}{x}$ e $j(x) = \sqrt{x}$, então

$(h \circ j)(x) = h(j(x)) = h(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$(h \circ j)'(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 0 + \frac{0 \times \sqrt{x} - 1 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} =$

$= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

102.1. Seja $g(x) = 3x - 1$ e $h(x) = x^2$, então

$(h \circ g)(x) = (3x - 1)^2 = f(x)$.

$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \times g'(x)$

Como $g'(x) = 3$ e $h'(x) = 2x$, tem-se:

$f'(x) = h'(3x - 1) \times 3 = 2(3x - 1) \times 3 = 6(3x - 1)$

102.2. Seja $g(x) = \sqrt{3 - x}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$, então

$(h \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - x}} = f(x)$.

$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \times g'(x)$

Como $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3 - x}}$ e $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, tem-se:

$f'(x) = h'(\sqrt{3 - x}) \times \frac{-1}{2\sqrt{3 - x}} = \frac{-1}{(\sqrt{3 - x})^2} \times \frac{-1}{2\sqrt{3 - x}} =$

$= \frac{1}{2(3 - x)\sqrt{3 - x}}$

103. $(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \times f'(1)$

Como a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, sabe-se que:

$f'(1) = m_t = \frac{1}{2}$ e $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

$g'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, logo $g'(1) = \frac{1}{2}$.

Então, tem-se:

$(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

104. $3x - y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 10$

A reta t_1 é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -3, logo:

$f'(-3) = m_{t_1} = 3$ e $f(-3) = 3 \times (-3) + 10 = 1$

As retas t_1 e t_2 são perpendiculares, logo $m_{t_2} = -\frac{1}{m_{t_1}} = -\frac{1}{3}$.

Como a reta t_2 é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, então $f'(1) = m_{t_2} = -\frac{1}{3}$. Assim,

$(f \circ f)'(-3) = f'(f(-3)) \times f'(-3) = f'(1) \times 3 = -\frac{1}{3} \times 3 = -1$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 81

105. Se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então a função é contínua porque é o quociente entre duas funções contínuas.

$$\lim_{x \to 0} j(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-(e^x - 1)}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = -1$$

e $j(0) = \ln k$.

A função j é contínua em $x = 0$ se $\lim_{x \to 0} j(x) = j(0)$.

$$\lim_{x \to 0} j(x) = j(0) \Leftrightarrow -1 = \ln k \Leftrightarrow k = e^{-1} \Leftrightarrow k = \frac{1}{e}$$

106.1. $\lim_{x \to 0} \frac{3e^x - 3}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3(e^x - 1)}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

106.2. $\lim_{x \to 0} \frac{xe^x - x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

106.3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} + \frac{e^x - 1}{x} \right) =$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 \right) + \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \times 2 + 1 = 3$$

Pág. 82

107.1. O domínio da função f é $\mathbb{R}$.

Se $x < 0$, então $f'(x) = (e^x)' = e^x$.

Se $x > 0$, então $f'(x) = (-e^x + 2)' = -e^x$.

Se $x = 0$, então:

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-e^h + 2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-e^h + 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left(-\frac{e^h - 1}{h} \right) = -1$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ então a função não é derivável em $x = 0$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ -e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

107.2. O domínio da função f é $\mathbb{R}$. Se $x < 0$, então:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{2x} \right)' = \frac{e^x \times 2x - (e^x - 1) \times 2}{(2x)^2} =$$

$$= \frac{2xe^x - 2e^x + 2}{4x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{2x^2}.$$

Se $x > 0$, então: $f'(x) = \left(3x^2 + \frac{x}{2} \right)' = 6x + \frac{1}{2}$

Se $x = 0$, então:

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{e^h - 1}{2h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{e^h - 1}{2h^2} = \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{e^h - 1}{h} \times \frac{1}{2h} \right) = 1 \times (-\infty) = -\infty$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3h^2 + \frac{h}{2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h\left(3h + \frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left(3h + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ então a função não é derivável em $x = 0$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{2x^2} & \text{se } x < 0 \\ 6x + \frac{1}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

108. Se a reta r é paralela à reta de equação $y = 2x$ então $m_r = 2$.

Seja $P(x, f(x))$. Como r é tangente ao gráfico da função f no ponto P, então $f'(x) = m_r$.

$$f'(x) = m_r \Leftrightarrow (e^x)' = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

$f(\ln 2) = e^{\ln 2} = 2$. Assim, $P(\ln 2, 2)$.

Pág. 83

109.1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 \right) = 1 \times 3 = 3$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $3x \longrightarrow 0$.

109.2. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1 - e^x}{x}} = -\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = -\frac{1}{1} = -1$

109.3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times e^x \right) =$

$= 1 \times 1 = 1$

109.4. $\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{1 - x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{-(x - 1)(x + 1)} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{-y(y + 2)} =$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{e^y - 1}{y} \times \frac{1}{-(y + 2)} \right) = 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

Mudança de variável:

Fazendo $x - 1 = y$, vem $x = y + 1$.

Se $x \longrightarrow 1$, então $y \longrightarrow 0$.

109.5. $\lim_{x \to +\infty} \left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right) \overset{0 \times \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

Mudança de variável:

Fazendo $\frac{1}{x} = y$, vem $x = \frac{1}{y}$.

Se $x \longrightarrow +\infty$, então $y \longrightarrow 0^+$.

110.1. $f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' \times e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

110.2. $f'(x) = (x^3 e^{-x})' = 3x^2 e^{-x} + x^3(-e^{-x}) = e^{-x}(3x^2 - x^3) = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$

110.3. $f'(x) = (2^{x \times \ln 3})' = (x \times \ln 3)' \times 2^{x \times \ln 3} \times \ln 2 = \ln 2 \times \ln 3 \times 2^{x \times \ln 3}$

110.4. $f'(x) = \left(\frac{x\pi^{-x} - 1}{\pi^x} \right)' = (x\pi^{-2x} - \pi^{-x})' =$

$$= \pi^{-2x} + x(-2\pi^{-2x} \ln \pi) - (-\pi^{-x} \ln \pi) =$$

$$= \pi^{-2x} - 2x\pi^{-2x} \ln \pi + \pi^{-x} \ln \pi$$

111. Seja t a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1.

$$h'(1) = m_t = \frac{\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right)}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Sendo $j(x) = 3^{\sqrt{h(x)}}$, então:

$j'(x) = \left(3^{\sqrt{h(x)}}\right)' = \left(\sqrt{h(x)}\right)' \times 3^{\sqrt{h(x)}} \times \ln 3 =$

$= \dfrac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} \times 3^{\sqrt{h(x)}} \times \ln 3$

Logo,

$j'(1) = \dfrac{h'(1)}{2\sqrt{h(1)}} \times 3^{\sqrt{h(1)}} \times \ln 3 = \dfrac{\frac{1}{2}}{2 \times \sqrt{\frac{1}{4}}} \times 3^{\sqrt{\frac{1}{4}}} \times \ln 3 =$

$= \dfrac{1}{2} \times 3^{\frac{1}{2}} \times \ln 3 = \dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{2}$

112. Determinar a taxa de crescimento da população no instante t corresponde a determinar a derivada da função N.

$N'(t) = (N_0\, e^{0,3t})' = N_0 \times (0,3t)' \times e^{0,3t} = N_0 \times 0,3 \times e^{0,3t}$

$\dfrac{N'(t)}{N(t)} = \dfrac{N_0 \times 0,3 \times e^{0,3t}}{N_0\, e^{0,3t}} = 0,3$

Como $\dfrac{N'(t)}{N(t)}$ é constante, conclui-se que a taxa de crescimento da população no instante t é proporcional ao número de bactérias existente nesse instante.

Pág. 84

Tarefa 15

1.1. Sendo $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + e$, então $f'(x) = \left(-e^{\frac{x}{2}} + e\right)' = -\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

$m_t = f'(0) = -\dfrac{1}{2}e^0 = -\dfrac{1}{2}$ e $f(0) = -e^0 + e = -1 + e$

O ponto $P(0\,,\ -1+e)$ pertence à reta $t:\ y = mx + b$,

logo $-1 + e = -\dfrac{1}{2} \times 0 + b \iff b = e - 1$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y = -\dfrac{1}{2}x + e - 1$.

1.2. Se a reta r é paralela à bissetriz dos quadrantes pares então $m_r = -1$.

A reta r é tangente ao gráfico de f num ponto $P(x\,,\ f(x))$, logo $m_r = f'(x)$.

$m_r = f'(x) \iff -1 = -\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \iff 2 = e^{\frac{x}{2}} \iff \dfrac{x}{2} = \ln 2$

$\iff x = 2\ln 2 \iff x = \ln 2^2 \iff x = \ln 4$

$f(\ln 4) = -e^{\frac{\ln 4}{2}} + e = -e^{\ln(4^{0,5})} + e = -e^{\ln\sqrt{4}} + e =$

$= -e^{\ln 2} + e = -2 + e$

Assim, $P(\ln 4\,,\ -2 + e)$.

1.3. $f'(x) = f(x) \iff -\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = -e^{\frac{x}{2}} + e \iff -e^{\frac{x}{2}} = -2e^{\frac{x}{2}} + 2e \iff$

$\iff e^{\frac{x}{2}} = 2e \iff \dfrac{x}{2} = \ln(2e) \iff \dfrac{x}{2} = \ln 2 + \ln e$

$\iff x = 2(\ln 2 + 1) \iff x = 2\ln 2 + 2$

$\iff x = \ln 2^2 + 2 \iff$

$\iff x = \ln 4 + 2$

2.1. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - e^{3x} + 1}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - (e^{3x} - 1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(1 - \dfrac{e^{3x} - 1}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0}\left(1 - \dfrac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3\right) = 1 - 1 \times 3 = -2$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $3x \longrightarrow 0$.

2.2. Se r é a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, então $m_r = f'(0)$, isto é, $m_r = -2$.

Seja $P(x\,,\ f(x))$ o ponto do gráfico de f em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é perpendicular à reta r.

Então, $f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \iff 1 - 3e^{3x} = \dfrac{1}{2} \iff e^{3x} = \dfrac{1}{6} \iff 3x = \ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$

$\iff 3x = -\ln 6 \iff x = -\dfrac{\ln 6}{3}$

2.3. $f(x) = x\,f'(x) \iff x - e^{3x} = x(1 - 3e^{3x})$

$\iff x - e^{3x} = x - 3xe^{3x} \iff 3xe^{3x} - e^{3x} = 0$

$\iff e^{3x}(3x - 1) = 0 \iff \underbrace{e^{3x} = 0}_{\text{eq. impossível}} \lor 3x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}$

3. A abcissa do ponto A é a solução positiva da equação $f(x) = f'(x)$.

$f(x) = f'(x) \iff 3x^2 e^{-x} = 6x\,e^{-x} + 3x^2(-e^{-x})$

$\iff 3x^2 e^{-x} = 6xe^{-x} - 3x^2 e^{-x} \iff 6x^2 e^{-x} - 6x\,e^{-x} = 0$

$\iff 6x\,e^{-x}(x - 1) = 0 \iff 6x = 0 \lor \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{eq. impossível}} \lor x - 1 = 0$

$\iff x = 0 \lor x = 1$

Como $f(1) = 3e^{-1} = \dfrac{3}{e}$, então $A\left(1\,,\ \dfrac{3}{e}\right)$.

Para determinar a abcissa do ponto B temos de resolver a equação $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \iff 6x\,e^{-x} - 3x^2 e^{-x} = 0 \iff 3x\,e^{-x}(2 - x) = 0$

$\iff 3x = 0 \lor \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{eq. impossível}} \lor 2 - x = 0 \iff x = 0 \lor x = 2$

Conclui-se então que $B(2\,,\ 0)$.

O ponto C pertence ao gráfico da função f e tem a mesma abcissa do ponto B, logo $C(2\,,\ f(2))$.

Como $f(2) = 12e^{-2}$, então $C(2\,,\ 12e^{-2})$.

$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{BC} \times (y_B - y_A)}{2} = \dfrac{12e^{-2} \times 1}{2} = 6e^{-2}$

4.1. Se a reta t é paralela ao eixo das abcissas então $m_t = 0$.

Como a reta t é tangente ao gráfico de g no ponto A, de abcissa x_A, então $m_t = g'(x_A)$.

$g'(x) = (-5x\,2^x)' = -5 \times 2^x + (-5x) \times 2^x \ln 2 =$

$= -5 \times 2^x(1 + x\ln 2)$

$m_t = g'(x_A) \iff 0 = -5 \times 2^{x_A}(1 + x_A \ln 2)$

$\iff \underbrace{-5 \times 2^{x_A} = 0}_{\text{eq. impossível}} \lor 1 + x_A \ln 2 = 0 \iff x_A = -\dfrac{1}{\ln 2}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

4.2. A ordenada do ponto A é dada por $g\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)$.

$$g\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=-5\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)\times 2^{-\frac{1}{\ln 2}}\approx 2{,}65$$

A ordenada do ponto A é aproximadamente igual a $2{,}65$.

Pág. 85

113. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x)}{1-x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{-y}=$$

$$=-\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{y}=-1$$

Consideremos os pontos $A(0\,,\,1)$ e $B(1\,,\,-1)$.

$\overrightarrow{AB}=(1\,,\,-2)$ e $m_{AB}=-2$.

Logo, o segmento de reta AB é definido por

$y=-2x+1\wedge 0\leqslant x\leqslant 1$.

Então, o prolongamento pedido pode, por exemplo, ser definido da seguinte forma:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } -1<x<0\\ 1-2x & \text{se } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{\ln x}{1-x} & \text{se } x>1\end{cases}$$

114. $$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{2+h}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\ln(2+h)+\ln 2}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\ln(2+h)-\ln 2}{h}=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)}{h}=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}\right)=-\left(1\times\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

Nota: Quando $h\longrightarrow 0$, também $\frac{h}{2}\longrightarrow 0$.

Pág. 86

115.1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)\times\ln(x+1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\times\ln(x+1)\right)=1\times 0=0$$

115.2. $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)(x+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y(y+2)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(y+1)}{y}\times\frac{1}{y+2}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Mudança de variável:

Fazendo $x-1=y$, vem $x=y+1$.

Se $x\longrightarrow 1$, então $y\longrightarrow 0$.

115.3. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\times\frac{3x+1}{2x}\right)=0\times\frac{3}{2}=0$$

Nota: Quando $x\longrightarrow+\infty$, também $3x+1\longrightarrow+\infty$.

115.4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\ln(2x+1)}{2x}}{\frac{e^x-1}{x}}\times 2\right)=\frac{1}{1}\times 2=2$$

Nota: Quando $x\longrightarrow 0$, também $2x\longrightarrow 0$.

115.5. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{2x\ln x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(y+1)}{y}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

Mudança de variável:

Fazendo $x-1=y$, vem $x=y+1$.

Se $x\longrightarrow 1$, então $y\longrightarrow 0$.

116.1. $f'(x)=(x\ln x)'=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

116.2. $$f'(x)=\left(\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)'=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}+1}=\frac{1}{x+2}$$

116.3. $$f'(x)=\left(\frac{\log_2 x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x\ln 2}\times x-\log_2 x\times 1}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\ln 2}-\log_2 x}{x^2}=\frac{1}{x^2\ln 2}-\frac{\log_2 x}{x^2}$$

116.4. $f'(x)=(e^x\ln^2 x)'=e^x\ln^2 x+e^x\,2\ln x\times\frac{1}{x}=e^x\ln x\left(\ln x+\frac{2}{x}\right)$

116.5. $$f'(x)=\left(\sqrt{\ln x^2}\right)'=\frac{(\ln x^2)'}{2\sqrt{\ln x^2}}=\frac{\frac{2x}{x^2}}{2\sqrt{\ln x^2}}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln x^2}}=\frac{1}{x\sqrt{\ln x^2}}$$

117.1. $D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_f\wedge f(x)>0\}=]-\infty\,,\,2[$

117.2. $g'(x)=\left(\log_\pi(f(x))\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln\pi}$, logo $g'(1)=\frac{f'(1)}{f(1)\ln\pi}$.

Por observação gráfica conclui-se que $f(1)>0$ e que $f'(1)<0$ (pois a função f é uma função afim de declive negativo). Sabe-se também que $\ln\pi>0$.

Logo, conclui-se que $g'(1)<0$, ou seja, que $g'(1)\in\mathbb{R}^-$.

Pág. 87

118. $f(x)=1+|\ln x|\iff f(x)=\begin{cases}1+\ln x & \text{se } x\geqslant 1\\ 1-\ln x & \text{se } 0<x<1\end{cases}$

O domínio da função f é $\mathbb{R}^+$.

Se $0<x<1$, então $f'(x)=(1-\ln x)'=-\frac{1}{x}$.

Se $x>1$, então $f'(x)=(1+\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Seja $x=1$, tem-se:

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1-\ln(1+h)-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\ln(1+h)}{h}=-1$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+\ln(1+h)-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

Como $f'(1^-)\neq f'(1^+)$ então a função não é derivável em $x=1$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f': \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

119. Sendo $g(x) = \dfrac{2^{\ln x}}{x}$, então

$$g'(x) = \left(\frac{2^{\ln x}}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times 2^{\ln x} \times \ln 2 \times x - 2^{\ln x} \times 1}{x^2} = \frac{2^{\ln x} \times \ln 2 - 2^{\ln x}}{x^2}$$

Como a reta t é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1, sabe-se que $m_t = g'(1)$.

$g'(1) = \dfrac{2^{\ln 1} \times \ln 2 - 2^{\ln 1}}{1^2} = \ln 2 - 1$, logo $m_t = \ln 2 - 1$.

O ponto de coordenadas $(1\,,\, g(1))$, ou seja, $(1\,,\,1)$, pertence à reta t.

$y = mx + b$ é a equação reduzida da reta t. Então, tem-se:

$1 = (\ln 2 - 1) \times 1 + b \iff 1 = \ln 2 - 1 + b \iff 2 - \ln 2 = b$

$\iff \ln(e^2) - \ln 2 = b \iff \ln\left(\dfrac{e^2}{2}\right) = b$

Sendo A o ponto de interseção da reta t com o eixo das ordenadas, então

$A\left(0\,,\, \ln\left(\dfrac{e^2}{2}\right)\right)$.

120.1. $f(x) = 0 \iff x\ln(x) - x = 0 \iff x(\ln(x) - 1) = 0 \wedge x > 0$

$\iff (x = 0 \vee \ln(x) - 1 = 0) \wedge x > 0$

$\iff (x = 0 \vee x = e) \wedge x > 0 \iff x = e$

120.2. $f'(x) = (x\ln(x) - x)' = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 =$

$= \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^+$

121.1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln x > 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x > 1\} =]1\,,\,+\infty[$

121.2. $g'(x) = (\ln(\ln x))' = \dfrac{(\ln(x))'}{\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} =$

$= \dfrac{1}{x\ln x},\ \forall x \in]1\,,\,+\infty[$

Assintota vertical

$\lim\limits_{x \to 1^+} g'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x\ln x} = +\infty$

A reta de equação $x = 1$ é assintota vertical do gráfico da função g'.

Assintota horizontal

$\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x\ln x} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de g'.

Conclusão: o gráfico da função g' admite duas assintotas paralelas aos eixos coordenados, as retas de equações $x = 1$ e $y = 0$.

Pág. 88

Tarefa 16

1.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 + 3 > 0\} = \mathbb{R}$ e $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0\} = \mathbb{R}$

1.2. $f(-x) = 5 - \ln(4(-x)^2 + 3) = 5 - \ln(4x^2 + 3) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, logo f é par.

$g(-x) = -x\ln((-x)^2 + 1) = -x\ln(x^2 + 1) = -g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, logo g é ímpar.

1.3.1. $f'(x) = (5 - \ln(4x^2 + 3))' = -\dfrac{8x}{4x^2 + 3}$ e

$g'(x) = (x\ln(x^2 + 1))' = 1 \times \ln(x^2 + 1) + x \times \dfrac{2x}{x^2 + 1} =$

$= \ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

Os declives das retas tangentes aos gráficos das funções f e g nos pontos de abcissas 1 e -1 são:

$f'(1) = -\dfrac{8}{7}$; $f'(-1) = \dfrac{8}{7}$;

$g'(1) = 1 + \ln 2$ e $g'(-1) = 1 + \ln 2$

1.3.2. Os declives das retas tangentes aos gráficos das funções f e g nos pontos de abcissas 2 e -2 são:

$f'(2) = -\dfrac{16}{19}$; $f'(-2) = \dfrac{16}{19}$;

$g'(2) = \dfrac{8}{5} + \ln 5$ e $g'(-2) = \dfrac{8}{5} + \ln 5$

1.3.3. Os declives das retas tangentes aos gráficos das funções f e g nos pontos de abcissas a e $-a$ são:

$f'(a) = -\dfrac{8a}{4a^2 + 3}$; $f'(-a) = \dfrac{8a}{4a^2 + 3}$;

$g'(a) = \ln(a^2 + 1) + \dfrac{2a^2}{a^2 + 1}$ e $g'(-a) = \ln(a^2 + 1) + \dfrac{2a^2}{a^2 + 1}$

1.4. $f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\dfrac{8x}{4x^2 + 3}$ e $g': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

1.5. $f'(-x) = -\dfrac{8(-x)}{4(-x)^2 + 3} = \dfrac{8x}{4x^2 + 3} = -f'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, logo a função f' é ímpar.

$g'(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + \dfrac{2(-x)^2}{(-x)^2 + 1} =$

$= \ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^2}{x^2 + 1} = g'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, logo a função g' é par.

1.6.1.1. Se o gráfico **II** fosse o de f então $f'(1)$ seria positiva, o que não corresponde aos valores obtidos em 1.3.1..

1.6.1.2. O gráfico **IV** corresponde a uma função ímpar e a função g' é uma função par.

1.6.2. f – **I**; g – **IV**; f' – **III**; g' – **II**.

2. Por exemplo, $h(x) = x^2 + 1$ e $j(x) = 2x^3$.

As funções h' e j' são definidas por $h'(x) = 2x$ e $j'(x) = 6x^2$.

h' é uma função ímpar e j' é uma função par porque

$h'(-x) = 2(-x) = -2x = -h'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ e

$j'(-x) = 6(-x)^2 = 6x^2 = j'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Seja f uma função par e g uma função ímpar.

Então, $f(-x) = f(x),\ \forall x \in D_f$ e $g(-x) = -g(x),\ \forall x \in D_g$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$f'(x) = (f(-x))' = (-x)'\,f'(-x) = -f'(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
logo f' é uma função ímpar.

$g'(x) = (-g(-x))' = -(-x)'\,g'(-x) = g'(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
logo g' é uma função par.

Pág. 89

122.1. $f'(x) = 0 \iff x \in]+\infty, -2[\cup \{-1, 1, 4\}$

122.2. $f'(x) < 0 \iff x \in]-2, -1[\cup]1, 3[$

122.3. Como $f(2) > 0$, então

$f'(x) \times f(2) > 0 \iff f'(x) > 0$

$\iff x \in]-1, 1[\cup]3, +\infty[\setminus \{4\}$

123. A situação verifica-se no referencial I . A função f é a derivada da função g .

Pág. 90

124.1.1. Na função h .   **124.1.2.** Na função g .

124.1.3. Na função f .

124.2. $f'(3^-) < 0$ e $f'(3^+) > 0$, logo a função f tem um mínimo para $x = 3$.

$g'(3^-) < 0$ e $g'(3^+) < 0$, logo a função g não tem extremo para $x = 3$.

$h'(3^-) < 0$ e $h'(3^+) > 0$, logo a função h tem um mínimo para $x = 3$.

Pág. 91

125. A afirmação **I** é verdadeira, porque toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.
A afirmação **II** é falsa, porque só temos garantia da existência de um extremo em $x = a$ se os sinais das derivadas laterais em $x = a$ forem diferentes.
A afirmação **III** é falsa. Se existe um extremo em $x = a$ apenas se pode concluir que os sinais das derivadas laterais em $x = a$ são diferentes.
A afirmação **IV** é verdadeira.

126.1. $D_g = \mathbb{R}$ e $g'(x) = \left(-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 2\right)' = -x^2 + 2x$

$g'(x) = 0 \iff -x^2 + 2x = 0 \iff x(-x+2) = 0$

$\iff x = 0 \lor x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	$g(0) = 2$	$\nearrow$	$g(2) = \dfrac{10}{3}$	$\searrow$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]2, +\infty[$ e é estritamente crescente em $]0, 2[$.

Mínimo relativo: 2 ; máximo relativo: $\dfrac{10}{3}$

126.2. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $g'(x) = \left(\dfrac{e^x}{x}\right)' = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

$g'(x) = 0 \iff \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \iff e^x(x-1) = 0 \land x^2 \neq 0$

$\iff (\underbrace{e^x = 0}_{\text{eq. impossível}} \lor x = 1) \land x \neq 0 \iff x = 1 \land x \neq 0$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
g'	$-$	s.s.	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	s.s.	$\searrow$	$g(1) = e$	$\nearrow$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1[$ e é estritamente crescente em $]1, +\infty[$.

Mínimo relativo: e

126.3. $D_g = \mathbb{R}^+$ e $g'(x) = (x \ln x)' = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

$g'(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \land x > 0$

$\iff x = e^{-1} \land x > 0 \iff x = \dfrac{1}{e} \land x > 0$

x	0		$\dfrac{1}{e}$	$+\infty$
g'		$-$	0	$+$
g		$\searrow$	$g\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

g é estritamente decrescente em $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ e é estritamente crescente em $\left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

Mínimo absoluto: $-\dfrac{1}{e}$

127.1. $h'(t) = \left(\dfrac{4t-60}{t-30}\right)' = \dfrac{4 \times (t-30) - (4t-60) \times 1}{(t-30)^2} =$

$= \dfrac{4t - 120 - 4t + 60}{(t-30)^2} = \dfrac{-60}{(t-30)^2}$

$h'(t) < 0$, $\forall t \in [0, 15]$, donde se conclui que a função é estritamente decrescente em $[0, 15]$.

No contexto do problema significa que, durante o período de tempo de 15 minutos, o reservatório esteve a esvaziar.

127.2. $h'(10) = \dfrac{-60}{(10-30)^2} = \dfrac{-60}{400} = -0{,}15$

A taxa de variação da altura do nível da água no instante $t = 10$ é de $-0{,}15$ m/min .

Pág. 92

128.1. $f(x) = x|x| \iff f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Se $x < 0$, então $f'(x) = (-x^2)' = -2x$.

Se $x > 0$, então $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

Se $x = 0$, então:

$f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h^2 - 0}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} (-h) = 0$

$f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^2 - 0}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} h = 0$

Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$, a função é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Assim, a função derivada de f é definida por:

$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright \begin{cases} 2x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

128.2. $f(x) = x|x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	+
f	↗	$f(0) = 0$	↗

f é crescente em todo o seu domínio.

129. O domínio da função g é $\mathbb{R}$.

Se $x < 0$, então $g'(x) = \left(\ln(x^2)\right)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Se $x > 0$, então $g'(x) = (e^{1-x} + x)' = -e^{1-x} + 1$.

A função não é derivável em $x = 0$ porque não é contínua em $x = 0$.

Assim, a função derivada de g é definida por:

$g' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{se } x < 0 \\ -e^{1-x} + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Se $x < 0$, então $g'(x) < 0$.

Sendo $x > 0$, então

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} = 1$

$\Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
g'	−	s.s.	−	0	+
g	↘	$g(0) = e$	↘	$g(1) = 2$	↗

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1[$ e é estritamente crescente em $]1, +\infty[$.

Mínimo relativo: 2; máximo relativo: e

130. Pode estudar-se a função v quanto aos máximos.

$$v'(t) = \left(-\frac{t^3}{10} + \frac{3t^2}{2} + \frac{35t}{6}\right)' = -\frac{3t^2}{10} + 3t + \frac{35}{6}$$

$$v'(t) = \left(-\frac{t^3}{10} + \frac{3t^2}{2} + \frac{35t}{6}\right)' = -\frac{3t^2}{10} + 3t + \frac{35}{6}$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3t^2}{10} + 3t + \frac{35}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow -9t^2 + 90t + 175 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{3} \vee t = \frac{35}{3}$$

Atendendo ao contexto, considere-se $t > 0$.

	0	$\frac{35}{3}$	$+\infty$
v'	+	0	−
v	↗	Máx.	↘

O máximo é $v\left(\frac{35}{3}\right) = \frac{6125}{54} \approx 113{,}4$. $v\left(\frac{35}{3}\right) > 90$

O João excedeu a velocidade permitida.

131. $R(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}24t + 1{,}2 = 0 \Leftrightarrow t = 5$

t	0		5	$+\infty$
R		+	0	−
T		↗	Máx.	↘

A temperatura máxima foi atingida 5 horas após a administração da medicação.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 93

132.1. $D_f = \mathbb{R}$ e $f'(x) = \left(e^{2x-x^2}\right)' = (2x - x^2)'\, e^{2x-x^2} = (2 - 2x)\, e^{2x-x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 - 2x)\, e^{2x-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \vee \underbrace{e^{2x-x^2} = 0}_{\text{eq. impossível}} \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	−
f	↗	$f(1) = e$	↘

f é estritamente crescente em $]-\infty, 1[$ e é estritamente decrescente em $]1, +\infty[$.

Máximo absoluto: e

132.2. $f(1 + x) = e^{2(1+x) - (1+x)^2} = e^{2+2x - (1+2x+x^2)} = e^{2+2x-1-2x-x^2} = e^{1-x^2}$

$f(1 - x) = e^{2(1-x) - (1-x)^2} = e^{2-2x - (1-2x+x^2)} = e^{2-2x-1+2x-x^2} = e^{1-x^2}$

Então, a reta de equação $x = 1$ é um eixo de simetria do gráfico da função f porque $f(1 + x) = f(1 - x)$.

133.1. $D_g = \mathbb{R}$

$$g'(x) = \left(\frac{2x}{e^x - x}\right)' = \frac{2(e^x - x) - 2x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} =$$

$$= \frac{2e^x - 2x - 2xe^x + 2x}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - 2xe^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(2 - 2x)}{(e^x - x)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(2 - 2x)}{(e^x - x)^2} = 0 \Leftrightarrow e^x(2 - 2x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{e^x = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee x = 1) \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'	+	0	−
g	↗	$g(1) = \frac{2}{e-1}$	↘

g é estritamente crescente em $]-\infty, 1[$ e é estritamente decrescente em $]1, +\infty[$.

Máximo absoluto: $\frac{2}{e-1}$

133.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{e^x - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x} - 1} = \frac{2}{0 - 1} = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x} - 1} = \frac{2}{+\infty - 1} = 0$

O gráfico da função g admite duas assintotas horizontais, as retas de equações $y = -2$ e $y = 0$.

134.1. $g'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'}{\frac{x}{x^2+1}} = \frac{\frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2}}{\frac{x}{x^2+1}} =$

$= \frac{\frac{x^2+1-2x^2}{x^2+1}}{x} = \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$

$D_{g'} = \{x \in D_g : x(x^2+1) \neq 0\} = \mathbb{R}^+$

134.2. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x(x^2+1)} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1	$+\infty$
g'		+	0	−
g		↗	$g(1) = -\ln 2$	↘

A função g tem um máximo igual a $-\ln 2$ para $x = 1$.

Pág. 94

Tarefa 17

1.1. 30 minutos corresponde a $t = 0{,}5$.

$A(0{,}5) = 4 \times 0{,}5 \times e^{-0{,}5 \times 0{,}5} \approx 1{,}56$

A área infetada, 30 min após a picada, era aproximadamente igual a $1{,}56 \text{ cm}^2$.

1.2. $A'(t) = (4t\,e^{-0{,}5t})' = 4e^{-0{,}5t} + 4t(-0{,}5e^{-0{,}5t}) =$

$= 4e^{-0{,}5t} - 2te^{-0{,}5t} = e^{-0{,}5t}(4 - 2t)$

$A'(1) = e^{-0{,}5}(4-2) = 2e^{-0{,}5} > 0$ e

$A'(3) = e^{-0{,}5 \times 3}(4-6) = -2e^{-1{,}5} < 0$.

Conclui-se, então, que uma hora após o instante em que ocorreu a picada, a área infetada estava a aumentar e 3 horas após estava a diminuir.

1.3. $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} (4t\,e^{-0{,}5t}) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{4t}{e^{0{,}5t}}\right) =$

$= 4 \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^{0{,}5t}}{t}}\right) = 4 \times \frac{1}{+\infty} = 0$

O resultado indica que, com o decorrer do tempo, a área infetada tende a desaparecer.

1.4. $A'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}5t}(4 - 2t) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0{,}5t} = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee 4 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

t	0		2	$+\infty$
A'	+	+	0	−
A	$A(0) = 0$	↗	$A(2) = \frac{8}{e}$	↘

Se $0 \leqslant t < 2$, a área infetada aumentou e para $t > 2$ a área diminuiu.

O valor máximo da área infetada foi de $\frac{8}{e} \text{ cm}^2$ e ocorreu 2 horas após a picada.

2.1.1. O comprimento, c, do arco AB que limita o setor circular utilizado na construção das miniaturas de chapéus é dado por $c = 10x$.

Sabe-se também que o comprimento desse arco é igual ao perímetro da circunferência que limita a base do cone.

Assim sendo, tem-se:

$2\pi r = 10x \Leftrightarrow r = \frac{10x}{2\pi} \Leftrightarrow r = \frac{5x}{\pi}$

2.1.2. $h^2 + \left(\frac{5x}{\pi}\right)^2 = 10^2 \Leftrightarrow h^2 = 100 - \frac{25x^2}{\pi^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{100 - \frac{25x^2}{\pi^2}}$

$\Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{25}{\pi^2}(4\pi^2 - x^2)} \Leftrightarrow h = \frac{5}{\pi} \times \sqrt{4\pi^2 - x^2}$

2.2. Quando $x = \frac{3\pi}{4}$, então $r = \frac{5 \times \frac{3\pi}{4}}{\pi} = \frac{15\pi}{4\pi} = \frac{15}{4}$ e

$h = \frac{5}{\pi} \times \sqrt{4\pi^2 - \frac{9\pi^2}{16}} = \frac{5}{\pi}\sqrt{\frac{55\pi^2}{16}} = \frac{5}{\pi} \times \frac{\pi}{4}\sqrt{55} = \frac{5}{4}\sqrt{55}$.

Assim, $V = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{15}{4}\right)^2 \times \frac{5}{4}\sqrt{55} = \frac{375}{64}\pi\sqrt{55} \text{ cm}^3$,

ou seja, $V \approx 136{,}5 \text{ cm}^3$.

2.3. $V = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5x}{\pi}\right)^2 \times \frac{5}{\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{125x^2}{3\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

O volume do cone é máximo quando $x \approx 294°$.

Pág. 95

Tarefa 18

1. $d(1) = f(1) - g(1) = e^{-1} + 1 - 2e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$ (63,2 m)

2. $D_d = D_f \cap D_g = [0, 4] \cap [0, 4] = [0, 4]$

$d(x) = f(x) - g(x) = e^{-x} + 1 - 2x\,e^{-x} = 1 + e^{-x} - 2x\,e^{-x} =$

$= 1 + e^{-x}(1 - 2x)$

A função d é definida por:

$d: [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 1 + e^{-x}(1 - 2x)$

3. d é contínua em $[0, 4]$ por resultar de operações entre funções contínuas, logo também é contínua em $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$.

Sabe-se que $d\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0{,}672$ e $d(3) \approx 0{,}751$.

Como d é contínua em $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ e $d\left(\frac{5}{2}\right) < 0{,}7 < d(3)$,

então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que

$\exists\, c \in \left]\frac{5}{2}, 3\right[: h(c) = 0{,}7$,

isto é, a equação $d(x) = 0{,}7$ é possível no intervalo $\left]\frac{5}{2}, 3\right[$.

No contexto do problema significa que, quando $2{,}5 < x < 3$, existe um local onde o rio tem 70 m de largura.

4. $d'(x) = \left[1 + e^{-x}(1 - 2x)\right]' = 0 + (-e^{-x})(1 - 2x) + e^{-x}(-2) =$

$= e^{-x}(-1 + 2x - 2) = e^{-x}(2x - 3)$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

x	0		1,5		4
d'	–	–	0	+	+
d	$d(0)$	↘	$d(1{,}5)$	↗	$d(4)$

O comprimento do tabuleiro da ponte é mínimo quando $x = 1{,}5$.

$$f(1{,}5) = e^{-1{,}5} + 1 = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{e^3}} + 1 = \frac{1}{e\sqrt{e}} + 1 = \frac{\sqrt{e}}{e^2} + 1$$

$$g(1{,}5) = 2 \times 1{,}5e^{-1{,}5} = \frac{3}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{e^3}} = \frac{3}{e\sqrt{e}} = \frac{3\sqrt{e}}{e^2}$$

Então, $A\left(1{,}5\,;\ \frac{\sqrt{e}}{e^2} + 1\right)$ e $B\left(1{,}5\,;\ \frac{3\sqrt{e}}{e^2}\right)$.

O comprimento do tabuleiro da ponte é dado por $d(1{,}5)$ e é aproximadamente igual a $55{,}4$ m .

Pág. 96

Tarefa 19

1.1. $C(5) = 500 - 150 \ln(0{,}5 \times 5^2 + 1) \approx 109{,}60$

O custo de 500 peças é aproximadamente igual a 109,6 € .

1.2. $C'(n) = \left(100n - 150 \ln(0{,}5n^2 + 1)\right)' = 100 - 150 \times \frac{n}{0{,}5n^2 + 1} =$

$= \frac{50n^2 - 150n + 100}{0{,}5n^2 + 1}$

$C'(n) = 0 \iff \frac{50n^2 - 150n + 100}{0{,}5n^2 + 1} = 0$

$\iff 50n^2 - 150n + 100 = 0 \wedge 0{,}5n^2 + 1 \neq 0 \iff n = 1 \vee n = 2$

n	0,8		1		2		2,5
C'		+	0	–	0	+	
C		↗	$C(1)$	↘	$C(2)$	↗	

As encomendas de 200 peças têm custo mínimo e as de 100 peças têm custo máximo.

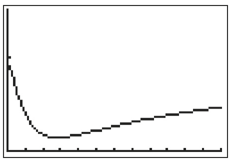
1.3. $\frac{C(7)}{700} = \frac{700 - 150\ln(0{,}5 \times 7^2 + 1)}{700} \approx 0{,}31$

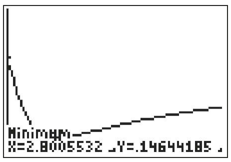
O custo médio por peça, num período em que são produzidas 700 peças, é, aproximadamente, igual a 0,31 € .

1.4. $M(n) = \frac{C(n)}{100n} = \frac{100n - 150 \ln(0{,}5n^2 + 1)}{100n} =$

$= \frac{n - 1{,}5 \ln(0{,}5n^2 + 1)}{n}$

1.5. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora obtém-se a seguinte representação:





Para que o preço médio por peça seja mínimo devem ser produzidas 280 peças .

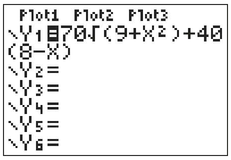
2. Seja A a projeção ortogonal de C sobre PT e x a distância, em quilómetros, de T a A .

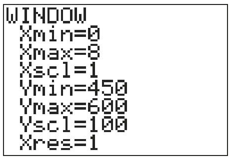
Então, $\overline{PT} = 8 - x$ e $\overline{CT} = \sqrt{9 + x^2}$.

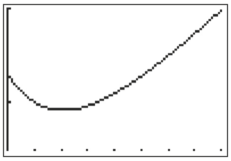
Consideremos a função f que a cada valor de x faz corresponder o custo total da conduta, em milhares de euros.

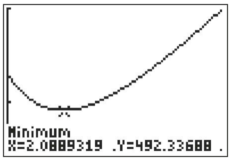
$f(x) = 70\sqrt{9 + x^2} + 40(8 - x)$

Vamos recorrer às capacidades gráficas da calculadora para determinar o valor de x para o qual a função f assume o valor mínimo.









O custo da instalação da conduta é mínimo quando $x \approx 2{,}089$ km , ou seja, $x \approx 2089$ m . Esse custo é aproximadamente igual a 492 337 € .

Então, conclui-se que $\overline{PT} = 8000 - 2089 = 5911$ m .

Pág. 97

135.1. $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x)\,2(x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2} =$

$= \frac{(x-1)\left[(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x)\right]}{(x-1)^4} =$

$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$

135.2. $f'(x) = (\ln^2 x)' = 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$

$f''(x) = \left(\frac{2 \ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln x \times 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$

135.3. $f'(x) = (x + 2^{-x})' = 1 + (-1) \times 2^{-x} \times \ln 2 = 1 - 2^{-x} \times \ln 2$

$f''(x) = (1 - 2^{-x} \times \ln 2)' = 0 - (-1) \times 2^{-x} \times \ln 2 \times \ln 2$

$= 2^{-x} \times \ln^2 2$

136.1. $h'(t) = (-t^2 + 7t + 1)' = -2t + 7$, logo $h'(2) = -2 \times 2 + 7 = 3$.

A velocidade do corpo no instante $t = 2$ é igual a 3 m/s .

136.2.1. $h''(t) = (-2t + 7)' = -2$, logo $h''(2) = -2$.

A aceleração em $t = 2$ é igual a -2 m/s^2 .

136.2.2. A aceleração em $t = 2$ é igual a -2 m/s^2 porque $h''(5) = -2$.

Pág. 98

137.1. $f'(a) < 0$ e $f''(a) > 0$, logo $f'(a) \times f''(a) < 0$.

137.2. $f''(b) > 0$ e $f'(c) > 0$, logo $f''(b) \times f'(c) > 0$.

137.3. $f'(b) > 0$ e $f''(c) < 0$, logo $f'(b) \times f''(c) < 0$.

137.4. $f''(c) < 0$ e $f''(d) < 0$, logo $f''(c) + f''(d) < 0$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 99

138.1. A representação II não pode corresponder a f e a representação III a f' porque f' passa de negativa a positiva, logo f teria de passar de decrescente a crescente.

138.2. A representação I não pode corresponder a f' e a representação II a f'' porque f'' teria de ser negativa em todo o seu domínio pois f' é decrescente, o que não acontece.

138.3. A correspondência correta entre as representações gráficas e as funções é: I – f'' ; II – f' ; III – f .

Pág. 100

139.1. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^4 - 2x^3 - 2)' = 4x^3 - 6x^2$ e

$f''(x) = (4x^3 - 6x^2)' = 12x^2 - 12x$

$f''(x) = 0 \iff 12x^2 - 12x = 0 \iff 12x(x-1) = 0$

$\iff x = 0 \lor x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	$f(0) = -3$	$\frown$	$f(1) = -3$	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e em $]1, +\infty[$ e voltada para baixo em $]0, 1[$.

Pontos de inflexão: $(0, -2)$ e $(1, -3)$

139.2. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = ((x-1)e^x)' = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = xe^x$

$f''(x) = (xe^x)' = 1e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$f''(x) = 0 \iff (1+x)e^x = 0 \iff 1 + x = 0 \lor \underbrace{e^x = 0}_{\text{eq. impossível}} \iff x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$f(-1) = -\frac{2}{e}$	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty, -1[$.

Ponto de inflexão: $\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$

139.3. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)' = \frac{2x}{x^2+1}$

$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x) = 0 \iff \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \iff -2x^2 + 2 = 0 \land (x^2+1)^2 \neq 0$

$\iff x = -1 \lor x = 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\frown$	$f(1) = \ln 2$	$\smile$	$f(1) = \ln 2$	$\frown$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e voltada para cima em $]-1, 1[$.

Pontos de inflexão: $(-1, \ln 2)$ e $(1, \ln 2)$

140.1. $f'(x) = (xe^{1-x^2})' = 1 \times e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = (1-2x^2)e^{1-x^2}$

$f''(x) = \left((1-2x^2)e^{1-x^2}\right)' = -4xe^{1-x^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{1-x^2} =$

$= (-4x - 2x + 4x^3)e^{1-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{1-x^2}$

140.2. $f''(x) = 0 \iff (4x^3 - 6x)e^{1-x^2} = 0 \iff 4x^3 - 6x = 0 \lor \underbrace{e^{1-x^2} = 0}_{\text{eq. impossível}}$

$\iff x(4x^2 - 6) = 0 \iff x = 0 \lor x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \lor x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6e}}{2e}$	$\smile$	$f(0) = 0$	$\frown$	$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6e}}{2e}$	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right[$ e em $\left]\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$ e voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right[$ e em $\left]0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right[$.

Pontos de inflexão:

$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6e}}{2e}\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6e}}{2e}\right)$

141. $f'(x) = \left(2x^2 - e^{-\frac{x}{2}}\right)' = 4x - \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = 4x + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

$f''(x) = \left(4x + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)' = 4 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = 4 - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

$f''(x) = 0 \iff 4 - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} = 0 \iff e^{-\frac{x}{2}} = 16$

$\iff -\frac{x}{2} = \ln 16 \iff x = -2\ln 16$

x	∞	$-2\ln 16$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$f(-2\ln 16)$	$\smile$

O gráfico de f tem um único ponto de inflexão, de abcissa $-2\ln 16$.

Pág. 101

Tarefa 20

1.1. $D(5) - D(0) = 10 + \frac{4}{0{,}002 \times 5^2 + 1} - \left(10 + \frac{4}{1}\right) \approx -0{,}2$

Durante as cinco primeiras horas de funcionamento, o diâmetro da peça diminuiu, aproximadamente, 2 mm .

1.2. O diâmetro inicial da peça é de 14 cm . Quando este sofre uma diminuição de 20% , o diâmetro passa a ser de apenas 11,2 cm $(14 \times 0{,}8 = 11{,}2)$.

$D'(t) = 11{,}2 \iff 10 + \frac{4}{0{,}002t^2 + 1} = 11{,}2$

$\iff \frac{4}{0{,}002t^2 + 1} = 1{,}2 \iff 0{,}002t^2 + 1 = \frac{4}{1{,}2}$

$\iff 0{,}002t^2 = \frac{10}{3} - 1 \iff t^2 = \frac{\frac{7}{3}}{0{,}002}$

$\iff t^2 = \frac{3500}{3} \underset{t \geq 0}{\iff} t \approx 34{,}1565 \qquad 0{,}1565 \times 60 \approx 9$

A peça deve ser substituída ao fim de, aproximadamente, 34 horas e 9 minutos de funcionamento.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

1.3. $D'(t) = \left(10 + \dfrac{4}{0{,}002t^2+1}\right)' = 0 + \dfrac{0-4\,(0{,}004t)}{(0{,}002t^2+1)^2} =$

$= \dfrac{-0{,}016t}{(0{,}002t^2+1)^2}$

$D''(t) = \left(\dfrac{-0{,}016t}{(0{,}002t^2+1)^2}\right)' =$

$= \dfrac{-0{,}016\,(0{,}002t^2+1)^2 - (-0{,}016t)\;2\,(0{,}002t^2+1)\,(0{,}004t)}{\left[(0{,}002t^2+1)^2\right]^2} =$

$= \dfrac{-0{,}016\,(0{,}002t^2+1)\,[0{,}002t^2+1-2\times 0{,}004t^2]}{(0{,}002t^2+1)^4} =$

$= -0{,}016 \times \dfrac{1-0{,}006t^2}{(0{,}002t^2+1)^3}$

$D''(t) = 0 \iff -0{,}016 \times \dfrac{1-0{,}006t^2}{(0{,}002t^2+1)^3} = 0$

$\iff 1 - 0{,}006t^2 = 0 \overset{t \geq 0}{\iff} t \approx 12{,}91$

t	0		12,91	$+\infty$
D''	$-$	$-$	0	$+$
D'	0	↘	$D'(12{,}91)$	↗

A taxa de variação do diâmetro é mínima quando $t \approx 12{,}91$ h .

2.1. $P(0) = \dfrac{100}{1+4e^0} = \dfrac{100}{5} = 20$

Na reabertura após o período de férias, existiam em armazém 20 toneladas de produto.

2.2. $P(4) = \dfrac{100}{1+4e^{-0{,}25\times 4}} = \dfrac{100}{1+4e^{-1}} \approx 40{,}5$

Não há em *stock* quantidade de produto suficiente para satisfazer a encomenda porque $P(4) < 48$.

2.3. $P'(t) = \left(\dfrac{100}{1+4e^{-0{,}25t}}\right)' = \dfrac{0-100\left(4\,(-0{,}25)e^{-0{,}25t}\right)}{\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^2} = \dfrac{100e^{-0{,}25t}}{\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^2}$

$P''(t) = \left(\dfrac{100e^{-0{,}25t}}{\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^2}\right)' =$

$= \dfrac{-25e^{-0{,}25t}\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^2 - \left(100e^{-0{,}25t}\right)2\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)\left(-e^{-0{,}25t}\right)}{\left[\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^2\right]^2} =$

$= \dfrac{-25e^{-0{,}25t}\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)\left(1+4e^{-0{,}25t}-8e^{-0{,}25t}\right)}{\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^4} =$

$= \dfrac{-25e^{-0{,}25t}\left(1-4e^{-0{,}25t}\right)}{\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^3}$

$P''(t) = 0 \iff \dfrac{-25e^{-0{,}25t}\left(1-4e^{-0{,}25t}\right)}{\left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^3} = 0$

$\iff -25e^{-0{,}25t}\left(1-4e^{-0{,}25t}\right) = 0 \wedge \left(1+4e^{-0{,}25t}\right)^3 \neq 0$

$\iff 1-4e^{-0{,}25t} = 0 \iff e^{-0{,}25t} = 0{,}25 \iff -0{,}25t = \ln 0{,}25$

$\iff t = \dfrac{\ln 0{,}25}{-0{,}25} \iff t \approx 5{,}5$

t	0		5,5	$+\infty$
P''	$+$	$+$	0	$-$
P'	$P'(0)$	↗	$P'(5{,}5)$	↘

A taxa de crescimento de produto em armazém é maior ao fim de 5,5 dias.

2.4. $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{100}{1+4e^{-0{,}25t}} = \dfrac{100}{1+4\times 0} = 100$

Conclui-se que, com o decorrer do tempo, o *stock* em armazém tenderia para 100 toneladas.

Pág. 102

Tarefa 21

1.1. $P(0) = 50 \times 0 \times e^{-0{,}25\times 0} + 12 = 12$

$P(9) = 50 \times 9 \times e^{-0{,}25\times 9} + 12 \approx 59{,}4$

O programa teve maior audiência no fim porque $P(9) > P(0)$.

1.2. $P'(t) = \left(50t \times e^{-0{,}25t} + 12\right)' = 50e^{-0{,}25t} + 50t\left(-0{,}25e^{-0{,}25t}\right) =$

$= 50e^{-0{,}25t}(1-0{,}25t)$

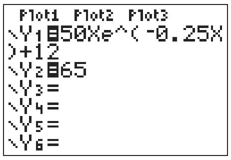
$P'(t) = 0 \iff 50e^{-0{,}25t}(1-0{,}25t) = 0$

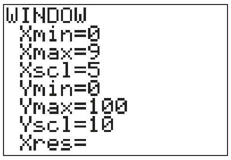
$\iff \underbrace{50e^{-0{,}25t} = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee 1-0{,}25t = 0 \iff t = 4$

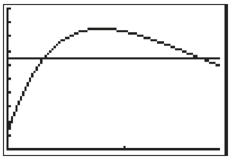
t	0		4		9
P'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
P	$P(0)$	↗	$P(4)$	↘	$P(9)$

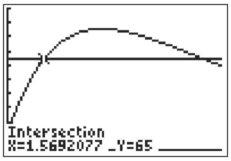
A função tem um máximo para $t = 4$. Logo, o debate teve início às 19 horas.

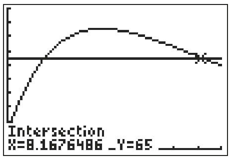
1.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:











Conclui-se, então, que $p \approx 1{,}6$ e $q \approx 8{,}2$.

No contexto apresentado, significa que entre as 16 h 36 min e as 23 h 12 min , aproximadamente, a percentagem de estudantes que ouviu o programa foi não inferior a 65% .

1.4. $P''(t) = \left(50e^{-0{,}25t}(1-0{,}25t)\right)' =$

$= 50\,(-0{,}25)e^{-0{,}25t}\,(1-0{,}25t) + 50e^{-0{,}25t}\,(-0{,}25) =$

$= -12{,}5e^{-0{,}25t}\,(1-0{,}25t+1) = -12{,}5e^{-0{,}25t}\,(2-0{,}25t)$

$P''(t) = 0 \iff -12{,}5e^{-0{,}25t}\,(2-0{,}25t) = 0$

$\iff \underbrace{-12{,}5e^{-0{,}25t} = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee 2-0{,}25t = 0 \iff t = 8$

t	0		8		9
P''	$-$	$-$	0	$+$	$+$
P	$P(0)$	⌒	$P(8)$	⌣	$P(9)$

A curva representativa do modelo tem um ponto de inflexão quando $t = 8$, o que corresponde às 23 horas.
O "espaço musical" teve a duração de uma hora.

2. Na primeira semana, 10% dos estudantes ouviram a abertura do programa, logo $P(0) = 10$.

$P(0) = 10 \iff a \times 0 \times e^{-b\times 0} + c = 10 \iff c = 10$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Assim, $P(t) = at \times e^{-bt} + 10$.

Como o máximo da audiência ocorreu às 20 h , com 80% dos estudantes a escutarem o programa, sabe-se que $P'(5) = 0$ e $P(5) = 80$.

$P'(t) = (at \times e^{-bt} + 10)' = ae^{-bt} + at \times (-b)e^{-bt} = ae^{-bt}(1 - bt)$

$$\begin{cases} P'(5) = 0 \\ P(5) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^{-5b}(1-5b) = 0 \\ 5ae^{-5b} + 10 = 80 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae^{-5b} = 0 \lor 1 - 5b = 0 \\ 5ae^{-5b} = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \lor b = 0{,}2 \\ ae^{-5b} = 14 \end{cases}$$

$$\underset{a>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b = 0{,}2 \\ ae^{-1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0{,}2 \\ a = 14e \end{cases}$$

Assim, tem-se: $a \approx 38{,}06$; $b = 0{,}2$ e $c = 10$.

Então, conclui-se que $P(t) = 38{,}06t \times e^{-0{,}2t} + 10$.

Pág. 103

142.1. $f(-x) = -(-x)^4 + \dfrac{(-x)^2}{2} + 1 = -x^4 + \dfrac{x^2}{2} + 1 = f(x)$

A função f é par porque $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

142.2. $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$

A função g é ímpar porque $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in D_g$.

142.3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 3(-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 1}$

A função h não é par porque $h(-x) \neq h(x)$ e não é ímpar porque $h(-x) \neq -h(x)$.

Portanto, a função h não é par nem ímpar.

142.4. $j(-x) = \dfrac{e^{-(-x)} + e^{-x}}{-x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{-x} = -\dfrac{e^{-x} + e^x}{x} = -j(x)$.

A função j é ímpar porque $j(-x) = -j(x)$, $\forall x \in D_j$.

143. A função par é a g porque quando uma função é par, objetos simétricos têm imagens iguais, logo o domínio de uma função par não pode ser $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nesse caso -1 pertence ao domínio e 1 não pertence.

144.1.

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$

144.2. A função f é contínua porque admite derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

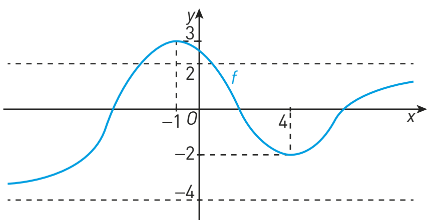
144.3. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 .

$t: y = mx + b$ e $m_t = f'(-1) = 0$

O ponto $P(-1\,,\ 3)$ pertence ao gráfico de f e à reta t , logo $b = 3$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y = 3$.

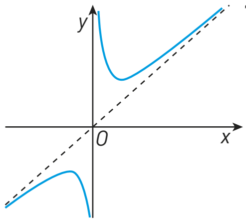
144.4. De acordo com as condições dadas, um possível gráfico de f é, por exemplo:



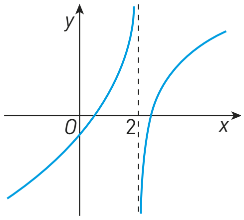
144.5. $D'_f =]-4\,,\ 3]$

Pág. 104

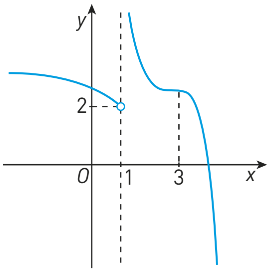
145.1.



145.2.



145.3.



146.1. Domínio

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

Paridade

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\dfrac{x}{x^2 + 1}$.

f é ímpar porque $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Assintotas

- Assintotas verticais

  O domínio da função é $\mathbb{R}$ e a função é contínua por ser racional, logo o seu gráfico não admite assintotas verticais.

- Assintotas horizontais

  Se $x \longrightarrow +\infty$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

  A reta $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

  Se $x \longrightarrow -\infty$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

  A reta $y = 0$ é, também, assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

Pontos de interseção com os eixos

- Zeros

  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \land x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$

  O gráfico de f interseta o eixo das abcissas e das ordenadas no ponto de coordenadas $(0\,,\ 0)$.

Intervalos de monotonia e extremos

$f'(x) = \left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{1(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \land x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \lor x = 1$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$-0,5$	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$

- Intervalos de monotonia

  f é crescente no intervalo $]-1\,,\ 1[$.

  f é decrescente nos intervalos $]-\infty\,,\ -1[$ e $]1\,,\ +\infty[$.

- Extremos

  $0,5$ é máximo absoluto e $-0,5$ é mínimo absoluto.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(-2x)\,(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\,(2x)\,(1-x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)\left[(-2x)\,(x^2+1) - 4x\,(1-x^2)\right]}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = 0 \iff 2x^3 - 6x = 0 \wedge x^2+1 \neq 0$$

$$\iff 2x\,(x^2-3) = 0 \iff x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$f(-\sqrt{3})$	$\smile$	0	$\frown$	$f(\sqrt{3})$	$\smile$

Se $x \in \left]-\infty\,,\ -\sqrt{3}\right[$ e se $x \in \left]0\,,\ \sqrt{3}\right[$, a concavidade do gráfico é "voltada para baixo".

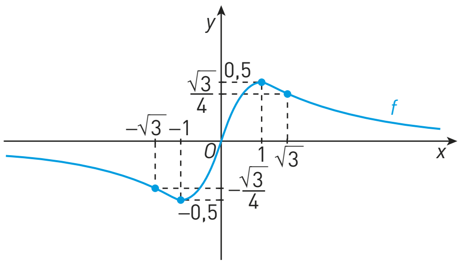
Se $x \in \left]-\sqrt{3}\,,\ 0\right[$ e se $x \in \left]\sqrt{3}\,,\ +\infty\right[$, a concavidade do gráfico é "voltada para cima".

Os pontos de coordenadas $\left(-\sqrt{3}\,,\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0\,,\ 0)$ e $\left(\sqrt{3}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

Contradomínio

$D'_f = [-0,5\,;\,0,5]$

Representação gráfica



146.2. **Domínio**

$D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Paridade

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - (-x)}{2-(-x)} = \frac{x^2+x}{2+x}$$

A função f não é par porque $f(-x) \neq f(x)$ e não é ímpar porque $f(-x) \neq -f(x)$.

Assintotas

- Assintotas verticais

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-x}{2-x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-x}{2-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A reta $x = 2$ é assintota vertical do gráfico de f .

- Assintotas não verticais

  Se existirem assintotas não verticais serão do tipo $y = mx + b$; $m\,,\ b \in \mathbb{R}$.

  Se $x \longrightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x}{2x-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-x}{2-x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-x+2x-x^2}{2-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

Se $m = -1$ e $b = -1$, então a reta $y = -x - 1$ é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Se $x \longrightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-x}{2x-x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2-x}{2-x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2-x+2x-x^2}{2-x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{2-x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

A reta $y = -x - 1$ também é assintota oblíqua do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

Pontos de interseção com os eixos

- Zeros

$$f(x) = 0 \iff \frac{x^2-x}{2-x} = 0 \iff x^2 - x = 0 \wedge x \neq 2$$

$$\iff x = 0 \vee x = 1$$

O gráfico de f interseta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas $(0\,,\ 0)$ e $(1\,,\ 0)$.

Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-x}{2-x}\right)' = \frac{(2x-1) \times (2-x) - (x^2-x) \times (-1)}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff -x^2 + 4x - 2 = 0 \wedge x \neq 2$$

$$\iff x = 2 - \sqrt{2} \vee x = 2 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	s.s.	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$f(2-\sqrt{2})$	$\nearrow$	s.s.	$\nearrow$	$f(2+\sqrt{2})$	$\searrow$

- Intervalos de monotonia

  f é crescente nos intervalos $\left]2-\sqrt{2}\,,\ 2\right[$ e $\left]2\,,\ 2+\sqrt{2}\right[$.

  f é decrescente nos intervalos $\left]-\infty\,,\ 2-\sqrt{2}\right[$ e $\left]2+\sqrt{2}\,,\ +\infty\right[$.

- Extremos

  $f\left(2+\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} - 3$ é máximo relativo e

  $f\left(2-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 3$ é mínimo relativo.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x)=\left(\frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2}\right)'=$$

$$=\frac{(-2x+4)(2-x)^2-2(2-x)(-1)(-x^2+4x-2)}{(2-x)^4}=$$

$$=\frac{(2-x)\left[(-2x+4)(2-x)+2(-x^2+4x-2)\right]}{(2-x)^4}=\frac{4}{(2-x)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4}{(2-x)^3}=0$ (eq. impossível)

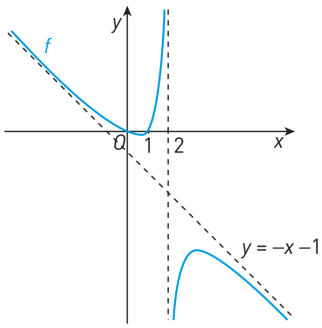
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	+	s.s.	−
f	∪	s.s.	∩

Se $x\in\,]2\,,\,+\infty[$, a concavidade do gráfico é "voltada para baixo".
Se $x\in\,]-\infty\,,\,2[$, a concavidade do gráfico é "voltada para cima".
O gráfico de f não tem pontos de inflexão.

Contradomínio

$D'_f=\left]-\infty\,,\,-2\sqrt{2}-3\right]\cup\left[2\sqrt{2}-3\,,\,+\infty\right[$

Representação gráfica



Pág. 105

147.1. Domínio

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ (x-1)^2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Paridade

$$f(-x)=\frac{3(-x)}{(-x-1)^2}=\frac{-3x}{(x+1)^2}$$

A função f não é par porque $f(-x)\neq f(x)$ e não é ímpar porque $f(-x)\neq -f(x)$.

Assintotas

- Assintotas verticais

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x}{(x-1)^2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x}{(x-1)^2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

A reta $x=1$ é assintota vertical do gráfico de f .

- Assintotas horizontais

Se $x\longrightarrow+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$

A reta $y=0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x\longrightarrow+\infty$.

Se $x\longrightarrow-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$$

A reta $y=0$ é, também, assintota horizontal do gráfico de f quando $x\longrightarrow-\infty$.

Pontos de interseção com os eixos

- Zeros

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3x}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow 3x=0\wedge x\neq 1 \Leftrightarrow x=0$

O gráfico de f interseta o eixo das abcissas e das ordenadas no ponto de coordenadas $(0\,,\,0)$.

Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x)=\left(\frac{3x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{3(x-1)^2-3x\times 2\times(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(x-1)(3x-3-6x)}{(x-1)^4}=\frac{-3x-3}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x-3=0\wedge x\neq 1 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	−	0	+	s.s.	−
f	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	s.s.	↘

- Intervalos de monotonia

f é crescente no intervalo $]-1\,,\,1[$.
f é decrescente nos intervalos $]-\infty\,,\,-1[$ e $]1\,,\,+\infty[$.

- Extremos

$-\frac{3}{4}$ é mínimo absoluto.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x)=\left(\frac{-3x-3}{(x-1)^3}\right)'=\frac{(-3)(x-1)^3-3(x-1)^2(-3x-3)}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{(x-1)^2\left[(-3)(x-1)-3(-3x-3)\right]}{(x-1)^6}=\frac{6x+12}{(x-1)^4}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6x+12}{(x-1)^4}=0 \Leftrightarrow 6x+12=0\wedge x\neq 1 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
f''	−	0	+	s.s.	+
f	∩	$-\frac{2}{3}$	∪	s.s.	∪

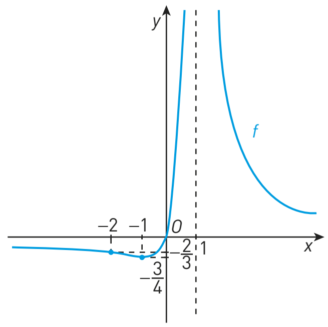
Se $x\in\,]-\infty\,,\,-2[$, a concavidade do gráfico é "voltada para baixo".
Se $x\in\,]-2\,,\,1[$ e $x\in\,]1\,,\,+\infty[$, a concavidade do gráfico é "voltada para cima".
O gráfico de f tem um ponto de inflexão, o ponto de coordenadas $\left(-2\,,\,-\frac{2}{3}\right)$.

Contradomínio

$D'_f=\left[-\frac{3}{4}\,,\,+\infty\right[$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Representação gráfica



147.2. Domínio

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} =]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$

Paridade

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

f é ímpar porque $f(-x) = -f(x)\,,\ \forall\, x \in D_f$.

Assintotas

- Assintotas verticais

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

As retas $x = 1$ e $x = -1$ são assintotas verticais do gráfico de f .

- Assintotas horizontais

Se $x \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1$$

A reta $y = 1$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Se $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -1$$

A reta $y = -1$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

Pontos de interseção com os eixos

- Zeros

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in D_f$ impossível

O gráfico de f não interseta o eixo das abcissas.

- Interseção com o eixo das ordenadas

O gráfico de f não interseta o eixo das ordenadas porque $0 \notin D_f$.

Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)' = \frac{1 \times \sqrt{x^2 - 1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\,x}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$f'(x) < 0\,,\ \forall\, x \in D_f$

- Intervalos de monotonia

  f é decrescente nos intervalos $]-\infty\,,\,-1[$ e $]1\,,\,+\infty[$.

- Extremos

  O gráfico de f não tem extremos.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}\right)' = \frac{0 + \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(2x)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{3x}{(x^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}$$

$f''(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in D_f$

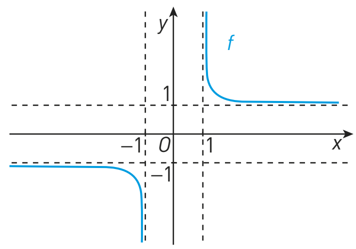
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$-$	s.s.	s.s.	s.s.	$+$
f	$\frown$	s.s.	s.s.	s.s.	$\smile$

Se $x \in]-\infty\,,\,-1[$, a concavidade do gráfico é "voltada para baixo".
Se $x \in]1\,,\,+\infty[$, a concavidade do gráfico é "voltada para cima".
O gráfico de f não tem pontos de inflexão.

Contradomínio

$D'_f =]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$

Representação gráfica



148. A expressão que corresponde a $f(x)$ é a representada em **II**. Atendendo ao domínio excluem-se as opções **I** e **IV**. A opção **III** também se exclui porque a derivada de uma função quadrática é uma função afim.

149. $f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = -2e^{-x^2} + (-2x)\left(-2xe^{-x^2}\right) = e^{-x^2}(-2 + 4x^2)$

O ponto C pertence ao eixo das ordenadas e ao gráfico de f'' , logo $C(0\,,\,f''(0))$, ou seja, $C(0\,,\,-2)$.
Os pontos A e B pertencem ao gráfico de f'' e têm ordenada nula, pois pertencem ao eixo das abcissas.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(-2 + 4x^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x^2} = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee -2 + 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então, conclui-se que $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0\right)$ e $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,0\right)$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 106

150.1. $f'_n(x) = (xe^x - nx)' = 1 \times e^x + xe^x - n = e^x(1+x) - n$

$f'_n(0) = -2 \iff e^0(1+0) - n = -2 \iff 1 - n = -2 \iff n = 3$

150.2.1. $f''_n(x) = (e^x(1+x) - n)' = e^x(1+x) + e^x = e^x(1+x+1)$

$= e^x(2+x)$

$f'_n(x) = f''_n(x) \iff e^x(1+x) - n = e^x(2+x)$

$\iff n = e^x(1+x) - e^x(2+x) \iff n = -e^x$

A equação é impossível porque $n \in \mathbb{N}$.

150.2.2. $f''_n(x) = 0 \iff e^x(2+x) = 0 \iff \underbrace{e^x = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee 2+x = 0 \iff x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''_n	$-$	0	$+$
f_n	$\frown$	$f_n(-2)$	$\smile$

Conclui-se que todas as funções da família no ponto de abcissa -2 têm um ponto de inflexão.

151.1. Domínio

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} > 0 \wedge x \neq 0\right\} = \mathbb{R}^+$

Paridade

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$, não faz sentido falar em paridade.

Assintotas

- Assintotas verticais

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(x + \ln\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

A reta $x = 0$ é assintota vertical do gráfico de f .

- Assintotas não verticais

Se existirem assintotas não verticais serão do tipo $y = mx + b$; m , $b \in \mathbb{R}$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{\ln x^{-1}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{-\ln x}{x}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty}\left(x + \ln\frac{1}{x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left(\ln\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, o gráfico de f não admite assintota não vertical.

Pontos de interseção com os eixos

- Zeros

$f(x) = 0 \iff x + \ln\frac{1}{x} = 0 \iff x - \ln x = 0 \iff \ln x = x$

(eq. impossível)

O gráfico de f não interseta o eixo das abcissas.

- Interseção com o eixo das ordenadas

O gráfico de f também não interseta o eixo das ordenadas porque $0 \notin D_f$.

Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(x + \ln\frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$f'(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \iff x = 1$

x	0		1	$+\infty$
f'	s.s.	$-$	0	$+$
f	s.s.	$\searrow$	1	$\nearrow$

- Intervalos de monotonia

f é crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

f é decrescente no intervalo $]0, 1[$.

- Extremos

1 é mínimo absoluto.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão

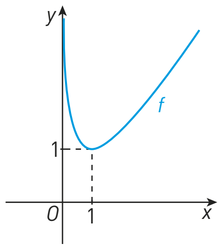
$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ $\qquad f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$

Então, o gráfico de f tem a concavidade "voltada para baixo" e não tem pontos de inflexão.

Contradomínio

$D'_f = [1, +\infty[$

Representação gráfica



151.2. Domínio

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

Paridade

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{1}{1+e^x}$$

A função f não é par porque $f(-x) \neq f(x)$ e não é ímpar porque $f(-x) \neq -f(x)$.

Assintotas

- Assintotas verticais

O domínio da função é $\mathbb{R}$ e a função é contínua, por ser o quociente entre duas funções contínuas, logo o seu gráfico não admite assintotas verticais.

- Assintotas horizontais

Se $x \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

A reta $y = 1$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

Se $x \longrightarrow -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{0}{0+1} = 0$

A reta $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

Pontos de interseção com os eixos

- Zeros

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^x + 1} = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \wedge e^x + 1 \neq 0$

A função não tem zeros, logo o gráfico de f não interseta o eixo das abcissas.

- Interseção com o eixo das ordenadas
O gráfico de f interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $\left(0\,,\ f(0)\right) = \left(0\,,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Intervalos de monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\dfrac{e^x}{e^x + 1}\right)' = \dfrac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} \qquad f'(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- Intervalos de monotonia

f é crescente em todo o seu domínio.

- Extremos

f não tem extremos.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left(\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}\right)' = \dfrac{e^x(e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1)e^x e^x}{(e^x + 1)^4} =$$

$$= \dfrac{e^x(e^x + 1)(e^x + 1 - 2e^x)}{(e^x + 1)^4} = \dfrac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - e^x) = 0 \wedge (e^x + 1)^3 \neq 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	$\frac{1}{2}$	$\frown$

Se $x \in \left]0\,,\ +\infty\right[$, a concavidade do gráfico é "voltada para baixo".

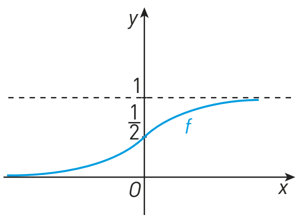
Se $x \in \left]-\infty\,,\ 0\right[$, a concavidade do gráfico é "voltada para cima".

O gráfico de f tem um ponto de inflexão, o ponto de coordenadas $\left(0\,,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Contradomínio

$D'_f = \left]0\,,\ 1\right[$

Representação gráfica



151.3. Domínio

$D_f = \mathbb{R}$

Paridade

$f(-x) = -xe^{-x} - e^{-x}$

A função f não é par porque $f(-x) \neq f(x)$ e não é ímpar porque $f(-x) \neq -f(x)$.

Assintotas

- Assintotas verticais

O domínio da função é $\mathbb{R}$ e a função é contínua por ser a diferença entre duas funções contínuas, logo o seu gráfico não admite assintotas verticais.

- Assintotas não verticais

Se existirem assintotas não verticais serão do tipo $y = mx + b$; m, $b \in \mathbb{R}$.

Se $x \longrightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x - \dfrac{e^x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[e^x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\right] = +\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de f não admite assintota não vertical quando $x \longrightarrow +\infty$.

Se $x \longrightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(e^x - \dfrac{e^x}{x}\right) = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to -\infty} (xe^x - e^x) =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} (-ye^{-y} - e^{-y}) = \lim_{y \to +\infty} \left(-\dfrac{y}{e^y} - e^{-y}\right) = 0$$

Mudança de variável:

Fazendo $-x = y$, vem $x = -y$.

Se $x \longrightarrow -\infty$, então $y \longrightarrow +\infty$.

A reta $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

Pontos de interseção com os eixos

- Zeros

$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x - e^x = 0$

$\Leftrightarrow e^x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

O gráfico de f interseta o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(1\,,\ 0)$.

- Interseção com o eixo das ordenadas

O gráfico de f interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $\left(0\,,\ f(0)\right) = (0\,,\ -1)$.

Intervalos de monotonia e extremos

$f'(x) = (xe^x - e^x)' = 1 \times e^x + xe^x - e^x = xe^x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^x = 0}_{\text{eq. impossível}} \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	-1	$\nearrow$

- Intervalos de monotonia

f é crescente no intervalo $\left]0\,,\ +\infty\right[$.

f é decrescente no intervalo $\left]-\infty\,,\ 0\right[$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

- Extremos

  -1 é mínimo absoluto.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$f''(x) = (xe^x)' = 1 \times e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \iff e^x(1+x) = 0 \iff \underbrace{e^x = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee 1 + x = 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	⌢	$-\frac{2}{e}$	⌣

Se $x \in]-\infty, -1[$, a concavidade do gráfico é "voltada para baixo".

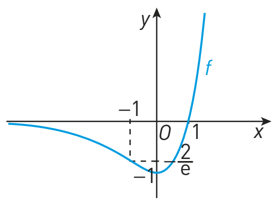
Se $x \in]-1, +\infty[$, a concavidade do gráfico é "voltada para cima".

O gráfico de f tem um ponto de inflexão, o ponto de coordenadas $\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$.

Contradomínio

$D'_f = [-1, +\infty[$

Representação gráfica



Pág. 107

152.1. $f'(x) = \left(\ln(x^k)\right)' = \frac{k\,x^{k-1}}{x^k} = \frac{k}{x}$

$f'(3) = 1 \iff \frac{k}{3} = 1 \iff k = 3$

152.2. $f'(2) = 2 \iff \frac{k}{2} = 2 \iff k = 4$

152.3. $f'(-1) = 2 \iff \frac{k}{-1} = 2 \iff k = -2$

Pág. 108

153.1. $f'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x - (-1)e^{-x} = e^x + e^{-x}$

$f''(x) = (e^x + e^{-x})' = e^x + (-1)e^{-x} = e^x - e^{-x}$

Então, $f''(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

153.2. $f(x) + f''(x) = f'(x) \iff 2(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x}$

$\iff e^x - 3e^{-x} = 0 \iff e^x - \frac{3}{e^x} = 0$

$\iff \frac{e^{2x} - 3}{e^x} = 0 \iff e^{2x} - 3 = 0 \iff e^{2x} = 3 \iff 2x = \ln 3$

$\iff x = \frac{1}{2}\ln 3 \iff x = \ln 3^{\frac{1}{2}} \iff x = \ln\sqrt{3}$

Pág. 109

154. A reta t de equação $y = x + 1 + \ln 2$ é tangente aos gráficos das funções f e g, respetivamente, nos pontos B e A. Logo, sabe-se que $f'(b) = g'(a) = m_t = 1$, sendo a e b as abcissas dos pontos A e B.

$f'(x) = \left(\ln(2x+4)\right)' = \frac{2}{2x+4} = \frac{1}{x+2}$

$g'(x) = \left(2 - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right)' = 0 - \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$

$f'(b) = 1 \iff \frac{1}{b+2} = 1 \iff b = -1$

$g'(a) = 1 \iff \frac{1}{2-a} = 1 \iff a = 1$

O ponto C tem a mesma abcissa que o ponto A e a mesma ordenada que o ponto B.

A ordenada do ponto B é dada por $f(-1)$, ou seja, é igual a $\ln 2$.

Assim sendo, as coordenadas do ponto C são $(1, \ln 2)$.

Pág. 110

Proposta 1

1. $P(12) - P(6) = \frac{5 \times 12 + 2}{12 + 1} - \frac{5 \times 6 + 2}{6 + 1} \approx 0{,}189$

A previsão para a variação do *peso* no segundo semestre do primeiro ano de vida é de, aproximadamente, $0{,}189$ kg, ou seja, 189 g.

2. $\text{t.m.v.}_{[0,\,3]} = \frac{P(3) - P(0)}{3 - 0} = \frac{4{,}25 - 2}{3} = 0{,}75$

No primeiro semestre de vida, o *peso* do animal aumentou à razão de $0{,}75$ kg/mês.

3. $P'(t) = \left(\frac{5t+2}{t+1}\right)' = \frac{5(t+1) - 1(5t+2)}{(t+1)^2} = \frac{3}{(t+1)^2}$

$P'(4) = \frac{3}{5^2} = 0{,}12$

Significa que no instante $t = 4$ o *peso* está a aumentar à razão de $0{,}12$ kg/mês.

Proposta 2

1. $C(t) = \frac{3t^2 + 4t + 15}{t^2 + t + 1} = \frac{3t^2 + 3t + 3 + t + 12}{t^2 + t + 1} =$

$= \frac{3(t^2 + t + 1) + t + 12}{t^2 + t + 1} = \frac{3(t^2 + t + 1)}{t^2 + t + 1} + \frac{t + 12}{t^2 + t + 1} =$

$= 3 + \frac{t + 12}{t^2 + t + 1}$

2. $C(0) = \frac{3 \times 0^2 + 4 \times 0 + 15}{0^2 + 0 + 1} = \frac{15}{1} = 15$

Quando o sumo foi colocado no frigorífico, a temperatura ambiente era de 15 °C.

3. $\text{t.m.v.}_{[0,\,2]} = \frac{C(2) - C(0)}{2 - 0} = \frac{5 - 15}{2} = -5$

Nas duas primeiras horas, a temperatura do sumo baixou, em média, 5 °C por hora.

4. $C'(t) = \left(3 + \frac{t + 12}{t^2 + t + 1}\right)' = \frac{1 \times (t^2 + t + 1) - (2t + 1)(t + 12)}{(t^2 + t + 1)^2} =$

$= \frac{-t^2 - 24t - 11}{(t^2 + t + 1)^2}$ $\quad C'(1) = \frac{-1 - 24 - 11}{(1 + 1 + 1)^2} = \frac{-36}{9} = -4$

A taxa de variação no instante $t = 1$ é igual a -4 °C por hora.

5. $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \lim\limits_{t \to +\infty}\left(3 + \frac{t + 12}{t^2 + t + 1}\right) = 3 + \lim\limits_{t \to +\infty}\left(\frac{t + 12}{t^2 + t + 1}\right) =$

$= 3 + \lim\limits_{t \to +\infty}\left(\frac{t}{t^2}\right) = 3 + \lim\limits_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t}\right) = 3 + 0 = 3$

Se a Ana deixar o sumo muito tempo no frigorífico, este ficará a 3 °C de temperatura.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Proposta 3

1.1. t.m.v.$_{[-1\,,\,0]} = \dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \dfrac{1-(-1)}{1} = 2$

1.2. t.m.v.$_{[-3\,,\,2]} = \dfrac{f(-3)-f(2)}{2-(-3)} = \dfrac{1-1}{5} = 0$

2. Por exemplo, $[-3\,,\,-1]$.
t.m.v.$_{[-3\,,\,-1]} < 0$ porque $f(-1) < f(-3)$.

3. A afirmação é falsa. Só podemos afirmar que $f(b) < f(a)$.

Pág. 111

Proposta 4

1.1. Por exemplo, $[b\,,\,c]$.
1.2. Por exemplo, $[a\,,\,b]$.
1.3. Por exemplo, $[b\,,\,d]$.
1.4 Por exemplo, $[a\,,\,d]$.

2.1. A taxa de variação da função no ponto de abcissa b é igual a 0.

2.2. $f'(b) = 0$, $f'(a) > 0$ e $f'(c) < 0$, logo conclui-se que $f'(c) < f'(b) < f'(a)$.

Proposta 5

1. $d(0) = \dfrac{0+20}{0+1} - 6 = 14$
A distância entre a casa do Luís e a da sua avó é de 14 km.

2. $d(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t+20}{2t^2+1} - 6 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t+20}{2t^2+1} - 6 = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{t+20-12t^2-6}{2t^2+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-12t^2+t+14}{2t^2+1} = 0$
$\Leftrightarrow -12t^2+t+14 = 0 \wedge 2t^2+1 \neq 0$. $t \approx 1{,}12 \vee t \approx -1{,}04$

Como $t \geqslant 0$, conclui-se que $t \approx 1{,}12$. $0{,}12 \times 60 \approx 7$
A viagem demorou, aproximadamente, 1 hora e 7 minutos.

3. $d(0{,}75) = \dfrac{0{,}75+20}{2 \times 0{,}75^2 + 1} - 6 \approx 3{,}76$
Ao fim de 45 minutos, faltavam percorrer, aproximadamente, $3{,}76$ km, ou seja, tinham sido percorridos, aproximadamente, $10{,}24$ km.

4. t.m.v.$_{[0\,;\,0{,}5]} = \dfrac{d(0{,}5)-d(0)}{0{,}5-0} = \dfrac{\frac{23}{3}-14}{0{,}5} = -\dfrac{38}{3}$ e

t.m.v.$_{[0{,}5\,;\,1]} = \dfrac{d(1)-d(0{,}5)}{1-0{,}5} = \dfrac{1-\frac{23}{3}}{0{,}5} = -\dfrac{40}{3}$

5. O Luís não fez a viagem com velocidade constante porque em intervalos de tempo iguais, os espaços percorridos são diferentes, como se pode observar a partir dos valores obtidos na alínea anterior.

Proposta 6

1. $d(5) - d(4) = (-2 \times 5^2 + 94 \times 5) - (-2 \times 4^2 + 94 \times 4) = 76$
A distância percorrida durante a 2.ª hora de viagem foi de 76 km.

2. t.m.v.$_{[0\,,\,5]} = \dfrac{d(5)-d(0)}{5-0} = \dfrac{420-0}{5} = 84$
A velocidade média durante a viagem foi de 84 km/h.

3. $d'(t) = (-2t^2 + 94t)' = -4t + 94$, logo $d'(2) = 86$.
No instante $t = 2$, a velocidade instantânea era igual a 86 km/h.

Pág. 112

Proposta 7

1.1. $m_r =$ t.m.v.$_{[1\,,\,7]} = \dfrac{2}{3}$

1.2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = m_t = m_r = \dfrac{2}{3}$ (Retas paralelas têm o mesmo declive.)

2. $t:\ y = \dfrac{2}{3}x + b$
O ponto $P(3\,,\,8)$ pertence à reta t, logo $8 = \dfrac{2}{3} \times 3 + b$
$\Leftrightarrow b = 6$.
A equação reduzida da reta t é $y = \dfrac{2}{3}x + 6$.

Proposta 8

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = m_r = \text{tg}\,(120°) = -\text{tg}\,(60°) = -\sqrt{3}$

2. Os pontos $P(2\,,\,y)$ e $A(4\,,\,0)$ pertencem à reta t, logo sabe-se que:
$\dfrac{y-0}{2-4} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{y}{-2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{3}$

Proposta 9

1. A reta s é paralela à reta r e tangente ao gráfico de f no ponto A de abcissa a, então, tem-se:
$m_s = m_r$ e $f'(a) = m_s$.
Sabe-se que $m_r = 4$ e que $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 2)' = 3x^2 - 4x$.
Então, $f'(a) = m_s \Leftrightarrow 3a^2 - 4a = 4 \Leftrightarrow 3a^2 - 4a - 4 = 0$
$\Leftrightarrow a = 2 \vee a = -\dfrac{2}{3}$.
Como $a < 0$, conclui-se que $a = -\dfrac{2}{3}$.

2. Sendo as retas tangentes paralelas ao eixo das abcissas, sabe-se que têm declive nulo.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x-4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{4}{3}$
Sabe-se que as coordenadas dos pontos pedidos são $(0\,,\,f(0))$ e $\left(\dfrac{4}{3}\,,\,f\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)$, ou seja, $(0\,,\,2)$ e $\left(\dfrac{4}{3}\,,\,\dfrac{22}{27}\right)$.

Pág. 113

Proposta 10

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{g(x)-g(3)}{x-3} = g'(3) = m_t = \dfrac{4-0}{0-8} = -\dfrac{1}{2}$

2. A equação reduzida da reta t é $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$.
O ponto A tem abcissa 3 e pertence à reta t, logo a sua ordenada igual a $\dfrac{5}{2}$.
$A_{[ABOC]} = \dfrac{\overline{BO} + \overline{AC}}{2} \times \overline{OC} = \dfrac{4+\frac{5}{2}}{2} \times 3 = \dfrac{39}{4}$

Proposta 11

1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) - 3 > 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge f(x) > 3\} =]-1, 2[\cup]5, +\infty[$

2. $f'(-1) > 0$, $f'(3{,}7) = 0$ e $f'(2) < 0$, logo conclui-se que $f'(2) < f'(3{,}7) < f'(-1)$.

3. $f'(2) = -\frac{9}{5}$, pois o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 é negativo.

A reta tangente ao gráfico de f no ponto B é definida por $y = -\frac{9}{5}x + b$.

Como o ponto B de coordenadas $(2, 3)$ pertence à reta tangente, então tem-se:

$3 = -\frac{9}{5} \times 2 + b \iff b = 3 + \frac{18}{5} \iff b = \frac{33}{5}$

Então, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto B é $y = -\frac{9}{5}x + \frac{33}{5}$.

Proposta 12

1. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 3}{2} = \frac{1}{2}$, $g(2) = \frac{2^2 - 3}{2} = \frac{1}{2}$ e

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x - 1 - 1}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{2}$

g é contínua em $x = 2$ porque $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = g(2)$.

2. $g'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{x^2 - 3}{2} + 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{x^2 - 1}{2}}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{2} = 1$

Pág. 114

Proposta 13

1. $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 3$ **2.** $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 2$ **3.** $f(5) = 5$

4. $\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5^-) = +\infty$

5. $\lim\limits_{x \to 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5^+) = -\infty$

Proposta 14

A reta t pode ser definida por uma equação do tipo $y = mx + b$, sendo m igual à derivada da função f no ponto de abcissa 3.

$m_t = f'(3) = -0{,}3$ e o ponto $P(3, 2)$ pertence à reta t, logo $2 = -0{,}3 \times 3 + b \iff b = 2{,}9$.

$t: y = -0{,}3x + 2{,}9$

A opção correta é a **(D)**.

Proposta 15

O gráfico de f é uma reta que interseta os eixos coordenados nos pontos $(0, 1)$ e $(3, 0)$, logo, o declive da reta é igual a $\frac{0 - 1}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$ e a função é definida por $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

$f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)' = -\frac{1}{3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Assim,

$\left(\frac{g}{f}\right)'(0) = \frac{g'(0) \times f(0) - g(0) \times f'(0)}{(f(0))^2} = \frac{-\frac{1}{3} \times 1 - 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right)}{1^2} = 0$

A opção correta é a **(A)**.

Pág. 115

Proposta 16

Sejam a e b os zeros da função f'.

Sabe-se que $f'(x) < 0$, $\forall x \in]a, b[$, logo f é decrescente em $]a, b[$.

Assim sendo, a opção correta é a **(A)**.

Proposta 17

1.1. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

$t: y = mx + b$ e $m_t = f'(-1)$

$f'(x) = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 - 7\right)' = -x^2 + 2x$, logo

$m_t = -(-1)^2 + 2(-1) = -3$.

O ponto $(-1, f(-1))$, ou seja, $\left(-1, -\frac{17}{3}\right)$ pertence à reta t, logo: $-\frac{17}{3} = -3 \times (-1) + b \iff b = -\frac{26}{3}$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y = -3x - \frac{26}{3}$.

1.2. Seja s a reta tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa a positiva e que é paralela à reta $y = -3x + 1$.

$s: y = mx + b$, sendo $m_s = f'(a)$ e $m_s = -3$.

$m_s = f'(a) \iff -3 = -a^2 + 2a \iff a^2 - 2a - 3 = 0$

$\iff a = 3 \vee a = -1$

Como $a > 0$, conclui-se que $a = 3$.

O ponto $(3, f(3))$, ou seja, $(3, -7)$ pertence à reta s, logo $-7 = -3 \times 3 + b \iff b = 3$.

Assim, a reta s é definida pela equação $y = -3x + 2$.

2.1. Atendendo à representação gráfica, sabe-se que $g'(3) = m_t = \text{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$.

O ponto de coordenadas $(1, 0)$ pertence à reta t, logo $0 = \sqrt{3} \times 1 + b \iff b = -\sqrt{3}$.

O ponto $P(3, g(3))$ também pertence à reta t, logo $g(3) = \sqrt{3} \times 3 - \sqrt{3} \iff g(3) = 2\sqrt{3}$.

Então, $(f \times g)'(3) = f'(3) \times g(3) + g'(3) \times f(3) =$

$= -3 \times 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \times (-7) = -13\sqrt{3}$

2.2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(3) = \frac{f'(3) \times g(3) - f(3) \times g'(3)}{(g(3))^2} =$

$= \frac{-3 \times 2\sqrt{3} - (-7) \times \sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 116

Proposta 18

Como o ponto de coordenadas $(2\,,\ 2)$ é comum aos gráficos das duas funções, tem-se: $f(2)=2$ e $g(2)=2$.

Sendo $f(x)=x^3-3x$, então $f'(x)=(x^3-3x)'=3x^2-3$.

Assim, $f'(2)=3\times 2^2-3=9$.

$(f\times g)'(2)=24 \Leftrightarrow f'(2)\times g(2)+g'(2)\times f(2)=24$

$\Leftrightarrow 9\times 2+g'(2)\times 2=24 \Leftrightarrow g'(2)=3$

A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 2 é dada por: $y-2=3(x-2)$.

Então, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 2 é $y=3x-4$.

Proposta 19

1. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$f'(x)=(-x^3+4x^2-5x+3)'=-3x^2+8x-5$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto -3x^2+8x-5$$

2. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+\sqrt{2}\right)'=x^3+2x^2-x-1$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^3+2x^2-x-1$$

3. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$$f'(x)=\left[(3x^2-4)\left(x^2-\frac{x}{2}\right)\right]'=6x\left(x^2-\frac{x}{2}\right)+(3x^2-4)\left(2x-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=6x^3-3x^2+6x^3-\frac{3}{2}x^2-8x+2=12x^3-\frac{9}{2}x^2-8x+2$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 12x^3-\frac{9}{2}x^2-8x+2$$

4. O domínio da função f é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$$f'(x)=\left(\frac{6}{x^2}\right)'=(6x^{-2})'=-12x^{-3}=\frac{-12}{x^3}$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \frac{-12}{x^3}$$

5. O domínio da função f é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)'=\frac{1\,(x-1)-x\times 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}$$

6. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$f'(x)=\left[(4x-3)^2\right]'=2\,(4x-3)\times 4=32x-24$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 32x-24$$

7. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$f'(x)=\left[(2x-x^2)^3\right]'=3\,(2x-x^2)^2\,(2-2x)=(6-6x)\,(2x-x^2)^2$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto (6-6x)\,(2x-x^2)^2$$

8. O domínio da função f é $\{x\in\mathbb{R}:\ 2x-3\geqslant 0\}=\left[\frac{3}{2},\ +\infty\right[$.

$$f'(x)=\left(\sqrt{2x-3}\right)'=\frac{(2x-3)'}{2\sqrt{2x-3}}=\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$ e

$$D_{f'}=\{x\in\mathbb{R}:\ 2x-3>0\}=\left]\frac{3}{2},\ +\infty\right[$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \left]\frac{3}{2},\ +\infty\right[\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

9. O domínio da função f é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x}\right)'=\left(2-\frac{1}{x}\right)'=0+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \frac{1}{x^2}$$

10. O domínio da função f é $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$$f'(x)=\left[\left(\frac{x}{(x-3)^2}\right)^2\right]'=2\left(\frac{x}{(x-3)^2}\right)\left(\frac{x}{(x-3)^2}\right)'=$$
$$=\frac{2x}{(x-3)^2}\times\frac{(x-3)^2-x\times 2\,(x-3)}{(x-3)^4}=$$
$$=\frac{2x}{(x-3)^2}\times\frac{(x-3)\,(x-3-2x)}{(x-3)^4}=-\frac{2x^2+6x}{(x-3)^5}$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\setminus\{3\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto -\frac{2x^2+6x}{(x-3)^5}$$

11. O domínio da função f é $\mathbb{R}\setminus\{-1\,,\ 1\}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2-1}\right)'=1-\frac{0-4\times 2x}{(x^2-1)^2}=1+\frac{8x}{(x^2-1)^2}$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\setminus\{-1\,,\ 1\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 1+\frac{8x}{(x^2-1)^2}$$

12. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e f é definida por:

$$f(x)=\begin{cases}3x-6 & \text{se } x\geqslant 2\\ -3x+6 & \text{se } x<2\end{cases}$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Se $x > 2$, então $f'(x) = (3x - 6)' = 3$.

Se $x < 2$, então $f'(x) = (-3x + 6)' = -3$.

Se $x = 2$, então:

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-3(2+h) + 6 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-3h}{h} = -3$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3(2+h) - 6 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

Como $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ então a função não é derivável em $x = 2$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{se } x > 2 \\ -3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

13. O domínio da função f é $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{2x - 1}\right)' = \frac{(2x-1)'}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} \quad \text{e}$$

$$D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f' : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$$

14. O domínio da função f é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e f é derivável em todos os pontos do seu domínio.

A função f pode ser definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{-x+1}{x^2-1} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{-1}{x+1} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

Se $x > 1$, então $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x+1}\right)' = \dfrac{0 - 1 \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

Se $x < 1 \wedge x \neq -1$, então

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{x+1}\right)' = \frac{0 - (-1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

15. O domínio da função f é $\mathbb{R}$.

Se $x > 1$, então $f'(x) = \left(\dfrac{2x}{x-1}\right)' = \dfrac{2(x-1) - 2x \times 1}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Se $x < 1$, então $f'(x) = (3x - 1)' = 3$.

Se $x = 1$, então:

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3(1+h) - 1 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\dfrac{2(1+h)}{1+h-1} - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\dfrac{2+2h}{h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2}{h^2} = +\infty$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, a função não é derivável em $x = 1$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{se } x > 1 \\ 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

16. O domínio da função f é $\mathbb{R}$ e f é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geqslant 2 \\ -x + 2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ -x + 3 & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Se $x > 2$, então $f'(x) = (x - 2)' = 1$.

Se $0 < x < 2$, então $f'(x) = (-x + 2)' = -1$.

Se $x < 0$, então $f'(x) = (-x + 3)' = -1$.

Se $x = 2$, então:

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(2+h) + 2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h) - 2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Como $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ a função não é derivável em $x = 2$.

A função também não é derivável em $x = 0$ porque não é contínua nesse ponto.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \vee 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Proposta 20

A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(1, 3)$ é paralela à reta de equação $x + y = 3$; logo, sabe-se que $f(1) = 3$ e que $f'(1) = -1$.

Sendo $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$, então

$$f'(x) = \left(\frac{ax+b}{x^2+1}\right)' = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f'(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=3 \\ \dfrac{-a-2b+a}{4}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$$

Conclui-se, então, que $a=4$ e $b=2$.

Pág. 117

Proposta 21

1.1. Se $x>1$, então

$$f'(x)=\left(x\sqrt{x-1}\right)'=1\times\sqrt{x-1}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=$$

$$=\sqrt{x-1}+\frac{x}{2\sqrt{x-1}}=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{3\times 2-2}{2\sqrt{2-1}}=\frac{4}{2}=2$$

1.2. Se $x<1$, então

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)'=\frac{3x^2(x-1)-(x^3-1)\times 1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-x^3+1}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-2x^2-x^2+1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2(x-1)-(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)(2x^2-x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(h-1)-f(-1)}{h}=f'(-1)=\frac{2(-1)^2-(-1)-1}{-1-1}=-1$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow 1^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(x^2+x+1)=3$$

Cálculo auxiliar

1 é zero do polinómio x^3-1, logo o polinómio é divisível por $x-1$.

Aplicando a Regra de Ruffini, tem-se:

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(x\sqrt{x-1}\right)=0$$

Não existe $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}f(x)$ porque $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}f(x)$.

Logo, f não é contínua em $x=1$.

A função f não é contínua em $x=1$, portanto, não é derivável em $x=1$.

3. Tendo em atenção os cálculos já efetuados anteriormente, conclui-se que a função derivada de f é definida por:

$$f':\mathbb{R}\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\mapsto\begin{cases}\dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} & \text{se } x>1\\[2mm] \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & \text{se } x<1\end{cases}$$

4. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 5.

$t:\ y=mx+b$ e $m_t=f'(5)=\dfrac{13}{4}$

O ponto $P\left(5,\ f(5)\right)$, ou seja, $P(5,\ 10)$ pertence à reta t, logo $10=\dfrac{13}{4}\times 5+b \Leftrightarrow b=-\dfrac{25}{4}$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y=\dfrac{13}{4}x-\dfrac{25}{4}$.

Proposta 22

1. $$f'(x)=\left(\frac{2x^3}{3x+1}\right)'=\frac{6x^2(3x+1)-2x^3\times 3}{(3x+1)^2}=\frac{12x^3+6x^2}{(3x+1)^2}$$

2. $$f'(x)=(e^{2x}-3x)'=2e^{2x}-3$$

3. $$f'(x)=\left(\frac{x-e^{2x}}{x^2+1}\right)'=\frac{(1-2e^{2x})(x^2+1)-2x(x-e^{2x})}{(x^2+1)^2}$$

4. $$f'(x)=\left(e^{3x}-\frac{3}{x}\right)'=3e^{3x}+\frac{3}{x^2}$$

5. $$f'(x)=\left(\ln(3x-1)\right)'=\frac{3}{3x-1}$$

6. $$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+x}\right)'=\frac{e^x(x^2+x)-e^x(2x+1)}{(x^2+x)^2}=\frac{e^x(x^2-x-1)}{(x^2+x)^2}$$

7. $$f'(x)=\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}=-\frac{1}{x}$$

8. $$f'(x)=(\log_2(x^3-3x+4))'=\frac{3x^2-3}{\ln 2\,(x^3-3x+4)}$$

9. $$f'(x)=(xe^{x^2-3x})'=1e^{x^2-3x}+x(2x-3)e^{x^2-3x}=$$

$$=e^{x^2-3x}(2x^2-3x+1)$$

10. $$f'(x)=\left(\ln\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\right)'=\frac{\dfrac{2x(x+3)-x^2\times 1}{(x+3)^2}}{\dfrac{x^2}{x+3}}=\frac{\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}}{\dfrac{x^2}{x+3}}=$$

$$=\frac{x^2+6x}{x^2(x+3)}=\frac{x(x+6)}{x^2(x+3)}=\frac{x+6}{x^2+3x}$$

11. $$f'(x)=\left(\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)'=\frac{\dfrac{e^x}{e^x+1}x-\ln(e^x+1)\times 1}{x^2}=$$

$$=\frac{e^x\times x-\ln(e^x+1)(e^x+1)}{(e^x+1)x^2}$$

12. $$f'(x)=\left(x+\log_2\left(\frac{x}{2^x}\right)\right)'=1+\frac{\left(\dfrac{x}{2^x}\right)'}{\ln 2\times\left(\dfrac{x}{2^x}\right)}=$$

$$=1+\frac{\dfrac{1\times 2^x-x\times 2^x\times\ln 2}{(2^x)^2}}{\ln 2\times\left(\dfrac{x}{2^x}\right)}=1+\frac{\dfrac{1-x\times\ln 2}{2^x}}{\ln 2\times\left(\dfrac{x}{2^x}\right)}=\frac{1}{\ln 2\times x}$$

Pág. 118

Proposta 23

1. $$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{\sqrt{2}x}-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{e^{\sqrt{2}x}-1}{\sqrt{2}x}\times\sqrt{2}\right)=1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

Nota: Quando $x\longrightarrow 0$, também $\sqrt{2}x\longrightarrow 0$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{5x}}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^x(e^{4x}-1)}{2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{4x}-1}{4x}\right) \times \lim\limits_{x\to 0}(-2e^x) = 1 \times (-2) = -2$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $4x \longrightarrow 0$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - \ln(x+1)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(3 - \dfrac{\ln(x+1)}{x}\right) = 3 - 1 = 2$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(6x+1)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(6x+1)}{6x} \times 6\right) = 1 \times 6 = 6$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $6x \longrightarrow 0$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x} \times \dfrac{x}{\ln(x+1)} \times 2\right) = 1 \times 1 \times 2 = 2$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-1}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y - 1}{y(y+2)} =$

$= \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{e^y-1}{y} \times \dfrac{1}{y+2}\right) = 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Mudança de variável:

Fazendo $x - 1 = y$, vem $x = y + 1$.

Se $x \longrightarrow 1$, então $y \longrightarrow 0$.

Proposta 24

1. f é uma função ímpar e tem domínio $\mathbb{R}$, logo a função f', função derivada de f, é par.
Se f é ímpar, então $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$ e se f' é par então $f'(-x) = f'(x)$, $\forall x \in D_{f'}$.
Assim, a tabela que relaciona o sinal de f' e a variação de f é a seguinte:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$;
f é estritamente crescente em $]-1, 1[$.

Mínimo absoluto: -1; máximo absoluto: 1

2. f é contínua em $\mathbb{R}$ porque admite derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

3. f é uma função ímpar. A função f' é par e função f'' é ímpar.
Assim, a tabela que relaciona o sinal de f'' e o sentido das concavidades do gráfico de f é:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\smile$	0	$\frown$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e em $]0, \sqrt{3}[$.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\sqrt{3}, 0[$ e em $]\sqrt{3}, +\infty[$.

Pontos de inflexão: $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. Como o domínio da função é $\mathbb{R}$ e a função é contínua, logo o seu gráfico não admite assintotas verticais.
Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, logo a reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.
Como f é uma função ímpar, então conclui-se que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$.
Assim, a reta de equação $y = 0$ também é assintota horizontal do gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.
Conclusão: O gráfico de f tem uma única assintota, a reta de equação $y = 0$.

Proposta 25

1. $D_f = \mathbb{R}$ e $f'(x) = (x + 1 + e^{-x})' = 1 + (-1)e^{-x} = 1 - e^{-x}$

$f'(x) = 0 \iff 1 - e^{-x} = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(0) = 2$	$\nearrow$

f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.
Mínimo absoluto igual a 2 (para $x = 0$).

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + 1 + e^{-x}) = +\infty$

3. A função f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de duas funções contínuas (uma afim e outra exponencial).
Sabe-se que a função tem um mínimo absoluto igual a 2 para $x = 0$ e que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que a função assume todos os valores do intervalo $[2, +\infty[$, ou seja, que o contradomínio de f é $[2, +\infty[$.

4. $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \wedge g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar

$g(x) \in \mathbb{R} \iff \ln(x) \in \mathbb{R} \iff x > 0$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) =$

$= \ln(x) + 1 + e^{-\ln(x)} = \ln(x) + 1 + e^{\ln(x^{-1})} = \ln(x) + 1 + \dfrac{1}{x}$

A função $f\circ g$ é definida por: $f\circ g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln x + 1 + \dfrac{1}{x}$

Pág. 119

Proposta 26

1. Sendo $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^{2x+1}$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g'(x) = 2e^{2x+1}$.

$(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = f'(e^{2x+1}) \times 2e^{2x+1} = \dfrac{1}{e^{2x+1}} \times 2e^{2x+1} = 2$

e $D_{(f\circ g)'} = D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

Conclui-se que a representação gráfica da função $(f\circ g)'$ é uma reta horizontal que interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 2)$, ou seja, é paralela ao eixo das abcissas.

2. $(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = g'(\ln x) \times \dfrac{1}{x} = 2e^{2\ln x + 1} \times \dfrac{1}{x} =$

$= \dfrac{2e^{2\ln x + 1}}{x}$

Sabe-se que o declive da reta tangente ao gráfico da função $g\circ f$ no ponto de abcissa $\dfrac{1}{2e}$ é dado por $(g\circ f)'\left(\dfrac{1}{2e}\right)$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$(g\circ f)'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{2e^{2\ln\left(\frac{1}{2e}\right)+1}}{\frac{1}{2e}}=\frac{2e^{\ln\left(\frac{1}{2e}\right)^2+\ln e}}{\frac{1}{2e}}=\frac{2e^{\ln\left(\frac{1}{4e^2}\times e\right)}}{\frac{1}{2e}}=$$

$$=\frac{2e^{\ln\left(\frac{1}{4e}\right)}}{\frac{1}{2e}}=\frac{2\times\frac{1}{4e}}{\frac{1}{2e}}=1$$

Se o declive da reta tangente ao gráfico da função $g\circ f$ no ponto de abcissa $\frac{1}{2e}$ é igual a 1, então a reta é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Proposta 27

Como a reta r tem declive $-\frac{1}{4}$ e é tangente ao gráfico da função g no ponto $A(3\,,\ 2)$, conclui-se que $g'(3)=-\frac{1}{4}$.

$$(f\circ g)'(3)=f'\big(g(3)\big)\times g'(3)=f'(2)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=(3\times 2^2-5\times 2)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

A opção correta é a **(B)**.

Proposta 28

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=m_t$, sendo t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a.

Como o declive da reta t é negativo, conclui-se que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$.

A opção correta é a **(C)**.

Pág. 120

Proposta 29

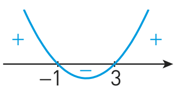
O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^-$ e voltada para cima em $\mathbb{R}^+$. Logo, conclui-se que a função f'' é negativa em $\mathbb{R}^-$ e positiva em $\mathbb{R}^+$.

A opção correta é a **(B)**.

Proposta 30

1.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_h\wedge h(x)\in D_g\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{R}\wedge h(x)\in\mathbb{R}^+\}=\,]-\infty\,,\ -1[\,\cup\,]3\,,\ +\infty[$



Cálculo auxiliar

$h(x)\in\mathbb{R}^+\iff x^2-2x-3>0$

$\iff x<-1\vee x>3$

$x^2-2x-3=0\iff x=-1\vee x=3$

1.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa e^{-1}.

$t:\ y=mx+b$ e $m_t=g'(e^{-1})$

Sendo $g(x)=\ln x$, logo $g'(x)=\frac{1}{x}$. Então, $m_t=\frac{1}{e^{-1}}=e$.

O ponto $P\big(e^{-1}\,,\ g(e^{-1})\big)$, ou seja, $P(e^{-1}\,,\ -1)$, pertence à reta t, logo $-1=e\times e^{-1}+b\iff b=-2$.

Assim, a reta t é definida pela equação $y=ex-2$.

2. $f(x)=(g\circ h)(x)=g\big(h(x)\big)=g(x^2-2x-3)=\ln(x^2-2x-3)$

$f'(x)=\big(\ln(x^2-2x-3)\big)'=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$ $f'(x)\neq 0\,,\ \forall\, x\in D_f$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
f'	$-$	s.s.	s.s.	s.s.	$+$
f	↘	s.s.	s.s.	s.s.	↗

f é estritamente decrescente em $]-\infty\,,\ -1[$ e estritamente crescente em $]3\,,\ +\infty[$.

3. $D_{h\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:\ x\in D_g\wedge g(x)\in D_h\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{R}^+\wedge g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar

$g(x)\in\mathbb{R}\iff\ln x\in\mathbb{R}\iff x>0$

$(h\circ g)(x)=h\big(g(x)\big)=h(\ln x)=(\ln x)^2-2\ln x-3$

$(h\circ g)(x)=0\iff(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

$\iff(\ln x=-1\vee\ln x=3)\wedge x\in\mathbb{R}^+\iff x=\frac{1}{e}\vee x=e^3$

Os zeros da função $h\circ g$ são $\frac{1}{e}$ e e^3.

Proposta 31

1. A equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é dada por $y-g(0)=g'(0)(x-0)$.

Sabe-se que $g'(0)=\frac{-1}{e^0}=-1$ e como o gráfico de g interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0\,,\ e)$, conclui-se que $g(0)=e$.

Então, $y-g(0)=g'(0)(x-0)\iff y-e=-1x\iff y=-x+e$.

Assim, a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é definida por $y=-x+e$.

2. $g'(x)=0\iff\frac{2x^2+x-1}{e^x}=0$

$\iff 2x^2+x-1=0\wedge\underbrace{e^x\neq 0}_{\text{cond. universal}}\iff x=-1\vee x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'	$+$	0	$+$	s.s.	$-$
g	↗	$g(-1)$	↘	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	↗

A função tem um máximo para $x=-1$ e um mínimo para $x=\frac{1}{2}$. Maximizante: -1; minimizante: $\frac{1}{2}$.

3. $g''(x)=\left(\frac{2x^2+x-1}{e^x}\right)'=\frac{(4x+1)e^x-(2x^2+x-1)e^x}{(e^x)^2}=$

$=\frac{e^x(4x+1-2x^2-x+1)}{(e^x)^2}=\frac{-2x^2+3x+2}{e^x}$

$g''(x)=0\iff-2x^2+3x+2=0\wedge\underbrace{e^x\neq 0}_{\text{cond. universal}}\iff x=2\vee x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
g''	$-$	0	$+$	0	$-$
g	⌒	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	⌣	$g(2)$	⌒

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{1}{2}\,,\ 2\right[$ e voltada para baixo em $\left]-\infty\,,\ -\frac{1}{2}\right[$ e em $]2\,,\ +\infty[$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pontos de inflexão:

$\left(-\frac{1}{2}, g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ e $(2, g(2))$

Pág. 121

Proposta 32

Seja f uma função polinomial do 3.° grau, então

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $f''(x) = 6ax + 2b$

Como f é uma função contínua (por ser polinomial) e o seu gráfico tem um ponto de inflexão no ponto de abcissa zero, logo tem-se $f''(0) = 0$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6a \times 0 + 2b = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$

Então, a expressão representativa da função polinomial f não tem termo do 2.° grau.

$f(x) = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$

Proposta 33

1. Pretende-se determinar $x \in D_f$ tal que $f(x) = \frac{x}{2}$.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} > 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow -x\ln(x) - \frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x\left(-\ln(x) - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{0 \notin D_f} \vee \ln x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e}$

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{e}}{e} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2e}$

As coordenadas do ponto do gráfico da função f, em que a ordenada é metade da abcissa, são $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$.

2. $f'(x) = \left[x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = 1 \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x\,\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\ln x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'	s.s.	+	0	–
f	s.s.	↗	$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$	↘

A função tem um máximo absoluto igual a $\frac{1}{e}$.

3. A reta de equação $y = -2x + e$ é tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$.

Então, sabe-se que $f'(x) = -2$.

$f'(x) = -2 \Leftrightarrow -\ln x - 1 = -2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Como $f(e) = e\ln\left(\frac{1}{e}\right) = e \times (-1) = -e$, conclui-se que $P(e, -e)$.

Proposta 34

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $f''(x) = 6ax + 2b$

A função f'' é ímpar se e só se $f''(-x) = -f''(x)$, $\forall x \in D$.

$f''(-x) = -f''(x) \Leftrightarrow 6a(-x) + 2b = -(6ax + 2b)$

$\Leftrightarrow -6ax + 2b = -6ax - 2b \Leftrightarrow 4b = 0 \Leftrightarrow b = 0$

Proposta 35

1. Sendo o triângulo $[OAB]$ isósceles, a abcissa do ponto B é $\frac{a}{2}$ e a ordenada é $f\left(\frac{a}{2}\right) = 4\ln(a+1) - a$.

A área do triângulo $[OAB]$ é dada por:

$A(a) = \frac{\overline{OA} \times f\left(\frac{a}{2}\right)}{2} = \frac{a \times (4\ln(a+1) - a)}{2} =$

$= 2a\ln(a+1) - \frac{a^2}{2}$, $a \in]0, 8]$

2. $A'(a) = \left(2a\ln(a+1) - \frac{a^2}{2}\right)' = 2\ln(a+1) + 2a \times \frac{1}{a+1} - a =$

$= 2\ln(a+1) + \frac{2a}{a+1} - a$

A função A' é contínua em $]0, 8]$, em particular é contínua em $[5{,}4; 5{,}5]$.

$A'(5{,}4) = 2\ln(6{,}4) + \frac{10{,}8}{6{,}4} - 5{,}4 \approx 9{,}6 \times 10^{-5}$ e

$A'(5{,}5) = 2\ln(6{,}5) + \frac{11}{6{,}5} - 5{,}5 \approx -0{,}064$

Como a função A' é contínua em $[5{,}4; 5{,}5]$ e $A'(5{,}5) < 0 < A'(5{,}4)$; então, pelo Teorema de Bolzano conclui-se que $\exists\, c \in]5{,}4; 5{,}5[: A'(c) = 0$.

Como a derivada passa de positiva a negativa, no intervalo $]5{,}4; 5{,}5[$, conclui-se que, no ponto de abcissa c a função A atinge um máximo.

Então, a área do triângulo $[OAB]$ é máxima para um valor de a pertencente ao intervalo $]5{,}4; 5{,}5[$.

3. $A''(a) = \left[2\ln(a+1) + \frac{2a}{a+1} - a\right]' =$

$= 2\frac{1}{a+1} + \frac{2(a+1) - 2a \times 1}{(a+1)^2} - 1 = \frac{2}{a+1} + \frac{2}{(a+1)^2} - 1 =$

$= \frac{2(a+1) + 2 - (a+1)^2}{(a+1)^2} = \frac{2a + 2 + 2 - a^2 - 2a - 1}{(a+1)^2} = \frac{3 - a^2}{(a+1)^2}$

$A''(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - a^2}{(a+1)^2} = 0 \wedge a \in]0, 8]$

$\Leftrightarrow 3 - a^2 = 0 \wedge a \in]0, 8] \Leftrightarrow a^2 = 3 \wedge a \in]0, 8]$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{3}$

x	0		$\sqrt{3}$		8
A''	s.s.	+	0	–	–
A	s.s.	∪	$A(\sqrt{3})$	∩	$A(8)$

O ponto de abcissa $\sqrt{3}$ é um ponto de inflexão do gráfico da função A.

Pág. 122

Proposta 36

1. $D_g = D_f = \mathbb{R}$ $\quad g'(x) = \left(-e^{f(x)}\right)' = -f'(x)\,e^{f(x)}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

f é decrescente em $]-\infty\,,\,3[$ e crescente em $]3\,,\,+\infty[$, logo conclui-se que se $x \in\,]-\infty\,,\,3[$ então $f'(x) < 0$ e se $x \in\,]3\,,\,+\infty[$ então $f'(x) > 0$.

Sabe-se também que $e^{f(x)} > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = 0 \iff -f'(x)\,e^{f(x)} = 0 \iff f'(x) = 0 \iff x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	$g(3) = -\frac{1}{e^2}$	$\searrow$

g é estritamente crescente em $]-\infty\,,\,3[$ e estritamente decrescente em $]3\,,\,+\infty[$.

Máximo absoluto igual a $-\frac{1}{e^2}$.

2. $g''(x) = \left(-f'(x)\,e^{f(x)}\right)' = -\left(f''(x)\,e^{f(x)} + f'(x)\,f'(x)\,e^{f(x)}\right) =$

$= -e^{f(x)}\left(f''(x) + (f'(x))^2\right)$

Sabe-se que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se tem: $e^{f(x)} > 0$, $f''(x) > 0$ e $(f'(x))^2 \geqslant 0$.

Logo, $g''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Conclui-se, então, que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo.

Proposta 37

1. Passadas duas horas, o raio do círculo é dado por

$R(2) = \frac{2 \times 2}{e^{0,2 \times 2 - 1}} = \frac{4}{e^{-0,6}} = 4e^{0,6}$ e a área regada é dada por

$A = \pi \times (4e^{0,6})^2 \approx 167$.

A área regada passadas duas horas é aproximadamente igual a $167\ \text{m}^2$.

2. A área regada é máxima quando o raio do círculo for máximo.

$R'(t) = \left(\frac{2t}{e^{0,2t-1}}\right)' = \frac{2e^{0,2t-1} - 2t\,(0,2e^{0,2t-1})}{(e^{0,2t-1})^2} =$

$= \frac{e^{0,2t-1}(2 - 0,4t)}{(e^{0,2t-1})^2} = \frac{2 - 0,4t}{e^{0,2t-1}}$

$R'(t) = 0 \iff \frac{2 - 0,4t}{e^{0,2t-1}} = 0 \iff 2 - 0,4t = 0 \iff t = 5$

t	0	5	$+\infty$
R'	$+$	0	$-$
R	$\nearrow$	$R(5) = 1$	$\searrow$

A área regada é máxima ao fim de 5 horas.

3. $R''(t) = \left(\frac{2 - 0,4t}{e^{0,2t-1}}\right)' = \frac{-0,4e^{0,2t-1} - (2 - 0,4t)\,(0,2e^{0,2t-1})}{(e^{0,2t-1})^2} =$

$= \frac{e^{0,2t-1}(-0,4 - (2 - 0,4t) \times 0,2)}{(e^{0,2t-1})^2} = \frac{0,08t - 0,8}{e^{0,2t-1}}$

$R''(t) = 0 \iff \frac{0,08t - 0,8}{e^{0,2t-1}} = 0 \iff 0,08t - 0,8 = 0 \iff t = 10$

t	0	10	$+\infty$
R''	$+$	0	$-$
R	$\smile$	$R(10) = \frac{20}{e}$	$\frown$

O ponto de inflexão do gráfico da função R tem de coordenadas $\left(10\,,\,\frac{20}{e}\right)$.

Proposta 38

1. Pretende-se determinar a concentração ao fim de 2 horas e 15 minutos, ou seja, quando $t = 2,25$.

$C(2,25) = 2,5 \times 2,25e^{-2,25(6-3)} \approx 0,0066$

A concentração ao fim de 2 horas e 15 minutos é aproximadamente igual a 0,0066 mg.

2. Pretende-se resolver a equação:

$C(2) = \frac{C(0,5)}{2} \iff 5e^{-2(6-d)} = \frac{1,25e^{-0,5(6-d)}}{2}$

$\iff \frac{e^{-2(6-d)}}{e^{-0,5(6-d)}} = \frac{0,625}{5} \iff e^{-1,5(6-d)} = 0,125$

$\iff e^{-9+1,5d} = 0,125 \iff -9 + 1,5d = \ln(0,125)$

$\iff d = \frac{\ln(0,125) + 9}{1,5} \iff d \approx 4,61$

A dose administrada foi aproximadamente igual a 4,61 mg.

3. Sendo $d = 4,5$, então $C(t) = 2,5te^{-1,5t}$.

$C'(t) = (2,5te^{-1,5t})' = 2,5e^{-1,5t} + 2,5t\,(-1,5e^{-1,5t}) =$

$= e^{-1,5t}(2,5 - 3,75t)$

$C'(t) = 0 \iff e^{-1,5t}(2,5 - 3,75t) = 0 \iff t = \frac{2,5}{3,75} \iff t = \frac{2}{3}$

t	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
C'	$+$	0	$-$
C	$\nearrow$	$C\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$

Como $\frac{2}{3} \times 60 = 40$, conclui-se que a concentração é máxima ao fim de 40 min.

Pág. 123

Proposta 39

1. 3500 litros corresponde a 3,5 milhares de litros.

$\frac{P(3,5)}{3,5} = \frac{4,5\ln(4,5)}{3,5} \approx 1,93$

Se num dos dias a empresa produzir 3500 l de fertilizante, o custo médio por litro é aproximadamente igual a 1,93 €.

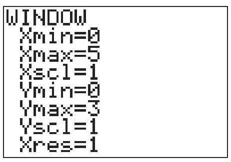
2. A expressão $\frac{P(x)}{x}$ representa o custo médio de 1000 l de fertilizante, em milhares de euros.

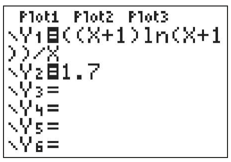
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{P(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x} =$

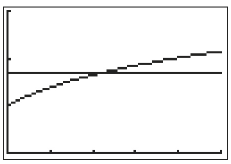
$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \lim\limits_{x \to 0}(x+1) = 1 \times 1 = 1$

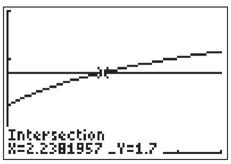
Quando a produção tende para zero, o custo de um milhar de litros de fertilizante tende para mil euros.

4. Pretende-se resolver a equação $\frac{P(x)}{x} = 1,70$, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.









NEMA12CPR2 © Porto Editora

Conclui-se que, nesse dia, a produção de fertilizante foi de aproximadamente $2{,}238$ milhares de litros, ou seja, 2238 l .

5. O valor obtido diariamente na venda de x milhares de litros produzidos é dado pela função V definida por $V(x) = 2x$.

O lucro (ou prejuízo) diário, em milhares de euros, da empresa na venda dos x milhares de litros produzidos é dado pela função L definida por

$L(x) = V(x) - C(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$.

$L'(x) = \left[2x - (x+1)\ln(x+1)\right]' =$

$= 2 - \left(\ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1}\right) = 2 - \ln(x+1) - 1 =$

$= 1 - \ln(x+1)$

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1$

$\Leftrightarrow x + 1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = \mathrm{e} - 1$

x	0		$\mathrm{e}-1$		5
L'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
L	$L(0)$	$\nearrow$	$L(\mathrm{e}-1)$	$\searrow$	$L(5)$

$L(\mathrm{e}-1) = 2(\mathrm{e}-1) - \mathrm{e}\ln\mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 - \mathrm{e} = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$

O lucro máximo é de 718 € quando a produção é de, aproximadamente, 1718 l .

PARA AVALIAR 3

Parte 1 – Questões de escolha múltipla

Pág. 124

1. Atendendo à representação gráfica de f, função polinomial do 4.º grau, sabe-se que:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ a < 0$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Sendo $a < 0$, então também $4a < 0$. Logo, as expressões representadas nas opções **(B)** e **(D)** não podem corresponder à função f' .

O gráfico da função f tem três extremos relativos que correspondem a zeros da função f' .

A função representada na opção **(C)** tem apenas um zero, logo também não corresponde à função f' .

Então, $f'(x) = -4x^3 + 2x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(-2x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	∞	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$

Assim sendo, opção correta é a **(A)**.

2. Sendo $f(x) = kx^3 - 3x^2$, então $f'(x) = 3kx^2 - 6x$ e $f''(x) = 6kx - 6$.

A representação gráfica da função f'' é uma reta de declive positivo, logo sabe-se que $6k > 0 \Leftrightarrow k > 0$.

A opção correta é a **(C)**.

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) + 2a - 5}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - (-2a + 5)}{x - a} =$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(2) = m_t = -2$

A opção correta é a **(D)**.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-(\mathrm{e}^{-2x} - 1)}{\mathrm{e}x} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - 1}{-2x} \times (-2)\right) =$

$= -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \times 1 \times (-2) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $-2x \longrightarrow 0$.

A opção correta é a **(B)**.

5. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2 + 2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x(x+2)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{x} \times \dfrac{1}{x+2}\right)$

$= 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

A opção correta é a **(A)**.

6. O ponto $P(1\ ,\ -2)$ é um ponto de inflexão do gráfico de uma função f, logo sabe-se que $f(1) = -2$.

Assim sendo, a única expressão que pode corresponder a $f(x)$ é $x^3 - 3x^2$.

De facto, se $f(x) = x^3 - 3x^2$ então $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f''(x) = 6x - 6$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$f(1) = 2$	$\smile$

O gráfico de f tem um ponto de inflexão para $x = 1$.

A opção correta é a **(D)**.

Parte 2 – Questões de desenvolvimento

Pág. 125

1.1. O declive da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto de abcissa 1, é igual a $f'(1)$.

$f'(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2+1) - \mathrm{e}^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2}$,

logo $f'(1) = \dfrac{\mathrm{e}(1 - 2 + 1)}{(1+1)^2} = 0$.

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto de abcissa 1, é igual a zero, conclui-se que a reta é paralela ao eixo das abcissas.

1.2. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, logo a função f é crescente em todo o seu domínio e não tem extremos.

1.3.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{x^2}{x^2+1}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = +\infty \times 1 = +\infty$

1.3.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}\right) = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

2.1. $N(t)=75 \Leftrightarrow 50+10\ln\left(\frac{t^2}{2}+1\right)=75 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{t^2}{2}+1\right)=2{,}5$

$\Leftrightarrow \frac{t^2}{2}+1=e^{2{,}5} \Leftrightarrow t^2=2e^{2{,}5}-2 \underset{t\geqslant 0}{\Leftrightarrow} t=\sqrt{2e^{2{,}5}-2}$

$\Leftrightarrow t\approx 4{,}729$

$4{,}729h = 4h + 0{,}729h$ e $0{,}729\times 60\approx 44$

Então, ao fim de aproximadamente 4 horas e 44 minutos existem 75 000 bactérias.

2.2. $N'(t)=\left[50+10\ln\left(\frac{t^2}{2}+1\right)\right]'=0+10\times\frac{t}{\frac{t^2}{2}+1}=$

$=10\times\frac{2t}{t^2+2}=\frac{20t}{t^2+2}$

Como $t\geqslant 0$, então $N'(t)\geqslant 0$, $\forall t\geqslant 0$.

Logo, a função N é crescente em todo o seu domínio, isto é, o número de bactérias cresce à medida que o tempo decorre.

2.3. $N''(t)=\left(\frac{20t}{t^2+2}\right)'=\frac{20(t^2+2)-20t(2t)}{(t^2+2)^2}=\frac{40-20t^2}{(t^2+2)^2}$

$N''(t)=0 \Leftrightarrow \frac{40-20t^2}{(t^2+2)^2}=0 \Leftrightarrow 40-20t^2=0 \wedge \underbrace{(t^2+2)^2\neq 0}_{\text{cond. universal}}$

$\Leftrightarrow t^2=2 \underset{t\geqslant 0}{\Leftrightarrow} t=\sqrt{2}$

t		$\sqrt{2}$	$+\infty$
N''	+	0	−
N	$\smile$	$N\sqrt{2}$	$\frown$

$N(\sqrt{2})=50+10\ln 2\approx 56{,}93$

Conclui-se que as coordenadas, arredondadas às centésimas, do ponto de inflexão do gráfico da função N, são $(1{,}41\ ;\ 56{,}93)$.

3.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ e^x\neq 0\}=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(\frac{2x-x^2}{e^x}\right)'=\frac{x^2-4x+2}{e^x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+2}{e^x}=0 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \wedge e^x\neq 0$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{2} \vee x=2-\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	$f(2-\sqrt{2})$	↘	$f(2+\sqrt{2})$	↗

f é estritamente crescente em $]-\infty, 2-\sqrt{2}[$ e em $]2+\sqrt{2}, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}[$.

$f(2-\sqrt{2})=\frac{2(2-\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}}}=$

$=\frac{4-2\sqrt{2}-4+4\sqrt{2}-2}{e^{2-\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{e^{2-\sqrt{2}}}$

$f(2+\sqrt{2})=\frac{2(2+\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}}=$

$=\frac{4+2\sqrt{2}-4-4\sqrt{2}-2}{e^{2+\sqrt{2}}}=\frac{-2\sqrt{2}-2}{e^{2+\sqrt{2}}}$

Máximo relativo igual a $\frac{2\sqrt{2}-2}{e^{2-\sqrt{2}}}$ (para $x=2-\sqrt{2}$) e mínimo relativo igual a $\frac{-2\sqrt{2}-2}{e^{2+\sqrt{2}}}$ (para $x=2+\sqrt{2}$).

3.2. $g'(x)=\left[e^{-x}(ax^2+bx+c)\right]'=$

$=-e^{-x}(ax^2+bx+c)+e^{-x}(2ax+b)=e^{-x}(-ax^2+2ax-bx+b-c)$

$g'(x)=f(x) \Leftrightarrow e^{-x}(-ax^2+2ax-bx+b-c)=\frac{2x-x^2}{e^x}$

$\Leftrightarrow e^{-x}(-ax^2+2ax-bx+b-c)=e^{-x}(2x-x^2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-a=-1\\ 2a-b=2\\ b-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ 2-b=2\\ b-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=0\end{cases}$

4.1. $f'(x)=(kx^2-e^x)'=2kx-e^x$, logo

$f'(0)=0-e^0=-1$, $\forall k\in\mathbb{R}$.

O declive da reta tangente ao gráfico de qualquer uma das funções da família dada no ponto de abcissa 0 é igual a -1.

Sabe-se também que $f(0)=-1$, $\forall k\in\mathbb{R}$, logo a equação da reta tangente ao gráfico de qualquer uma das funções da família dada no ponto de abcissa 0 é:

$y-(-1)=-1(x-0) \Leftrightarrow y=-x-1$.

4.2. $f''(x)=(2kx-e^x)'=2k-e^x$

Relativamente à função representada graficamente sabe-se que $f''(\ln(6))=0$.

Ora,

$f''(\ln(6))=0 \Leftrightarrow 2k-e^{\ln(6)}=0 \Leftrightarrow 2k-6=0 \Leftrightarrow k=3$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 129

Tarefa 1

1.1.1. Como o círculo tem raio 1 e os pontos C e A são simétricos em relação a Ox, então

$$A_{[OABC]} = 2A_{[OBC]} = 2 \times \frac{1 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

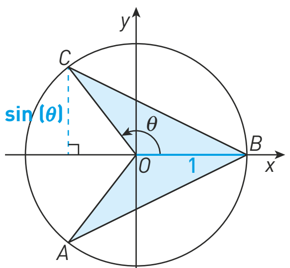
1.1.2. $A_{[OABC]} = 2A_{[OBC]} = 2 \times \dfrac{1 \times \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} = 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1.2. A área do polígono $[OABC]$ é máxima quando a área do triângulo $[OBC]$ for máxima, ou seja, quando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

1.3.

$A_{[OABC]} = 2A_{[OBC]} =$

$= 2 \times \dfrac{1 \times \sin(\theta)}{2} = \sin(\theta)$



1.4.1. $A(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(\theta) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \wedge 0 < \theta < \pi$

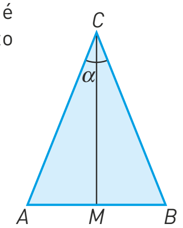
$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} \vee \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

1.4.2. $A(\theta) = 0{,}7$; $\sin(\theta) \approx \sin(0{,}78) \wedge 0 < \theta < \pi$

$\theta \approx 0{,}78 \vee \theta \approx \pi - 0{,}78$

$\theta \approx 0{,}78 \text{ rad} \vee \theta \approx 2{,}36 \text{ rad}$

2.1. Seja $[CM]$ a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao vértice C. Como o triângulo é isósceles, conclui-se que M é o ponto médio de $[AB]$.



$\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\overline{MB}}{10}$

$\Leftrightarrow \overline{MB} = 10\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Logo, $\overline{AB} = 2\overline{MB} = 20\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ e

$P(\alpha) = 10 + 10 + 20\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 20 + 20\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) =$

$= 20\left(1 + \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right).$

2.2. $P(\alpha) = 25 \Leftrightarrow 20\left(1 + \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = 25 \Leftrightarrow 1 + \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$; $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \approx \sin(0{,}2527)$

Como $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, então $0 < \dfrac{\alpha}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Conclui-se então que $\alpha \approx 2 \times 0{,}2527$ rad, ou seja, $\alpha \approx 0{,}51$ rad.

2.3. Sendo o triângulo retângulo, em que a medida de cada um dos catetos é 10, então $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Assim, tem-se:

$P\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 20\left(1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 20 + 20 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 20 + 10\sqrt{2}.$

Logo, a medida da hipotenusa é $20 + 10\sqrt{2} - 20 = 10\sqrt{2}$.

Pág. 130

1.1. Como o ponto P se move sobre a circunferência de raio 1, sabe-se que $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

1.2. Seja P' a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo das ordenadas.

O triângulo $[BPP']$ é retângulo em P', logo sabe-se que $d^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{BP'}^2$.

- Para $\alpha \in [0, \pi]$, tem-se:

$\overline{OP'} = \sin\alpha$, $\overline{PP'} = |\cos\alpha|$ e $\overline{BP'} = \overline{OB} - \overline{OP'}$

$d^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{BP'}^2 \Leftrightarrow d^2 = (|\cos\alpha|)^2 + (3 - \sin\alpha)^2$

$\Leftrightarrow d^2 = \cos^2\alpha + 9 - 6\sin\alpha + \sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow d^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 9 - 6\sin\alpha$

$\Leftrightarrow d^2 = 1 + 9 - 6\sin\alpha$

$\Leftrightarrow d^2 = 10 - 6\sin\alpha$

- Para $\alpha \in]\pi, 2\pi[$, tem-se:

$\overline{OP'} = -\sin\alpha$, $\overline{PP'} = |\cos\alpha|$ e $\overline{BP'} = \overline{BO} + \overline{OP'}$

$d^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{BP'}^2 \Leftrightarrow d^2 = (|\cos\alpha|)^2 + (3 + (-\sin\alpha))^2$

$\Leftrightarrow d^2 = \cos^2\alpha + 9 - 6\sin\alpha + \sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow d^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 9 - 6\sin\alpha$

$\Leftrightarrow d^2 = 1 + 9 - 6\sin\alpha \Leftrightarrow d^2 = 10 - 6\sin\alpha$

Assim, conclui-se que $d^2 = 10 - 6\sin\alpha$, $\forall\, \alpha \in [0, 2\pi[$.

1.3. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 16 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{4} \vee \cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$

Como $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

Então, $\sin\alpha = \cos\alpha \times \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{4} \times \sqrt{15} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ e

$d = \sqrt{10 - 6\sin\alpha} = \sqrt{10 - 6\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \sqrt{10 + \dfrac{3\sqrt{15}}{2}}.$

$d = \sqrt{10 + \dfrac{3\sqrt{15}}{2}}$

Pág. 131

2.1. $D_f = \mathbb{R}$

2.2.1. $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \geqslant -\sin x \geqslant -1$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant -\sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 - 1 \leqslant 1 - \sin x \leqslant 1 + 1$

Ou seja, $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Daqui resulta que o contradomínio da função f é $[0, 2]$.

2.2.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 1$

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $[-\pi, \pi]$, conclui-se que $x = -\dfrac{3\pi}{4} \vee x = \dfrac{\pi}{4}$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

2.2.3. O máximo da função é igual a 2.

Os maximizantes correspondem aos valores de x para os quais $f(x) = 2$.

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - \sin(2x) = 2 \Leftrightarrow \sin(2x) = -1$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2.3. $f(x + \pi) = 1 - \sin\left(2(x + \pi)\right) = 1 - \sin(2x + 2\pi) =$

$= 1 - \sin(2x) = f(x)$

π é período de f porque $f(x + \pi) = f(x),\ \forall x \in D_f$.

3.1. $-1 \leqslant \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant -3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 3$

$\Leftrightarrow 1 - 3 \leqslant 1 - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1 + 3$

$\Leftrightarrow -2 \leqslant 1 - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 4 \Leftrightarrow -2 \leqslant f(x) \leqslant 4$

Então, $D'_f = [-2,\ 4]$.

3.2. $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 1 + \sin^2 x \leqslant 2$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant f(x) \leqslant 2$

Então, $D'_f = [1,\ 2]$.

3.3. $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 2 + \sin x \leqslant 3$

$\Leftrightarrow 1 \geqslant \frac{1}{2 + \sin x} \geqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$

Então, $D'_f = \left[\frac{1}{3},\ 1\right]$.

4.1. $h(-x) = \sin(-x) - \sin\left(\frac{-x}{2}\right) = -\sin(x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$= -h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, h é uma função ímpar.

4.2. $h(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, h é uma função par.

4.3. $h(x) = 1 - 2\sin(\pi + x) = 1 - 2(-\sin x) = 1 + 2\sin x$

$h(-x) = 1 + 2\sin(-x) = 1 + 2(-\sin x) = 1 - 2\sin x$

h não é par nem ímpar porque

$h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$.

5.1. $\sin x = \sin\frac{\pi}{7} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \vee x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5.2. $\sqrt{3} + 2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5.3. $|2\sin x| = 1 \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \vee 2\sin x = -1$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \vee \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$

$\vee\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5.4. $2\sin^2 x - \sin x = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{2} \vee \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Pág. 132

Tarefa 2

1.1.1. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2}$

1.1.2. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1.2. A área do triângulo $[ABC]$ é máxima quando o ponto C coincidir com o ponto D, ou seja, quando $\theta = 0$.

1.3. $A(\theta) = \frac{2 \times \cos\theta}{2} = \cos\theta$

1.4.1. $A(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

1.4.2. $A(\theta) = 0{,}7 \Leftrightarrow \cos\theta = 0{,}7 \wedge 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$; $\theta \approx 0{,}80$ rad

2.1.1. Sabe-se que $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ e que $P(0, \sin\alpha)$.

$\overline{CP} = \overline{CO} + \overline{OP} = 1 + \sin\alpha$

2.1.2. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \frac{2\cos\alpha \times (1 + \sin\alpha)}{2} = \cos\alpha \times (1 + \sin\alpha)$

2.2.1. $A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \times \left(1 + \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

2.2.2. $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \times \left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{4} =$

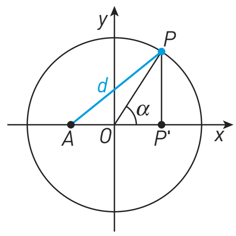
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

2.2.3. $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \times \left(1 + \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

Pág. 133

6.1. $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$



6.2. $\overline{PA}^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{AP'}^2 \Leftrightarrow d^2 = \sin^2\alpha + \left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right)^2$

$\Leftrightarrow d^2 = \sin^2\alpha + \frac{1}{4} + \cos\alpha + \cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow d^2 = 1 + \frac{1}{4} + \cos\alpha \Leftrightarrow d^2 = \frac{5}{4} + \cos\alpha$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

6.3. Se $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ então:

$d^2 = \frac{5}{4} + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \Leftrightarrow d^2 = \frac{5}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow d^2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow d^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{7}}{2}$

6.4. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow (-0{,}6)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 0{,}64 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0{,}8 \vee \cos \alpha = -0{,}8$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\cos \alpha = -0{,}8$.

Logo, $d^2 = \frac{5}{4} - 0{,}8 \Leftrightarrow d^2 = \frac{5}{4} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow d^2 = \frac{9}{20}$

$\Leftrightarrow d = \frac{3}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow d = \frac{3}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow d = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Pág. 134

7.1. $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\frac{2\pi}{3} = \cos \pi - 2\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) =$

$= -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Logo, $\frac{2\pi}{3}$ é solução da equação $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos x = 0$.

7.2. $\cos(-x)\cos(\pi - x) - \sin^2(\pi + x) =$

$= \cos x \times (-\cos x) - (-\sin x)^2 = -\cos^2 x - \sin^2 x =$

$= -(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1$

7.3. $\cos x - \cos x \sin^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x) = \cos x (\cos^2 x) =$

$= \cos^3 x$

Pág. 135

8.1.1. $g(-x) = 1 - \cos(\pi - 2(-x)) = 1 - \cos(\pi + 2x) =$

$= 1 - \cos(\pi - 2x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Logo, g é uma função par.

8.1.2. $g(x + \pi) = 1 - \cos(\pi - 2(x + \pi)) = 1 - \cos(\pi - 2x - 2\pi) =$

$= 1 - \cos(-\pi - 2x) = 1 - \cos(\pi - 2x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Logo, π é período de g porque $g(x + \pi) = g(x)$, $\forall x \in D_g$.

8.2. $\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(2\alpha) = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2(2\alpha) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \vee \cos(2\alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, conclui-se que $2\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Logo, $\cos(2\alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Assim,

$g(\alpha) = 1 - \cos(\pi - 2\alpha) = 1 + \cos(2\alpha) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}$

9.1. $-1 \leqslant \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$

$\Leftrightarrow -2 \leqslant -2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 2$

$\Leftrightarrow 3 - 2 \leqslant 3 - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 3 + 2$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant 3 - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 5 \Leftrightarrow 1 \leqslant f(x) \leqslant 5$

Então, $D'_f = [1, 5]$.

$[1, 5] \subset \mathbb{R}^+$, logo conclui-se que o contradomínio de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^+$.

9.2. A afirmação é verdadeira porque $0 \notin D'_f$.

9.3. $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3 - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

10.1. Se $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$, então

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \cos x \leqslant \cos 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$.

O máximo de f em $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ é 1.

10.2. Se $x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$, então

$\cos \pi \leqslant \cos x \leqslant \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow -1 \leqslant \cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$

O mínimo de f em $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ é -1.

11.1. $g(x + \pi) = \sin(x + \pi)\cos(x + \pi) = -\sin x(-\cos x) =$

$= \sin x \cos x = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Logo, π é período de g porque $g(x + \pi) = g(x)$, $\forall x \in D_g$.

11.2. $g(x) < 0 \wedge x \in [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow [(\sin x > 0 \wedge \cos x < 0) \vee (\sin x < 0 \wedge \cos x > 0)]$

$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

Pág. 136

Tarefa 3

1.1.1. $A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{2\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times 1}{2} = \frac{2 \times 1 \times 1}{2} = 1$

1.1.2. $A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{2\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times 1}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3} \times 1}{2} = \sqrt{3}$

1.2. Não. À medida que θ aumenta, também $\overline{AB}$ aumenta.

1.3. $A(\theta) = \frac{2\,\text{tg}\,\theta \times 1}{2} = \text{tg}\,\theta$

1.4.1. $A(\theta) = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\,\theta = 1 \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

1.4.2. $A(\theta) = 4 \Leftrightarrow \text{tg}\,\theta = 4 \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; $\theta \approx 1{,}33$ rad

2.1. $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BA} \Leftrightarrow 6 = 2\overline{AB} + \overline{BA} \Leftrightarrow 6 = 3\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2$

A amplitude do ângulo BAC é $\pi - \alpha$.

$\text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow -\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = -2\,\text{tg}\,\alpha$

$\text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow -\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{OP}}{6} \Leftrightarrow \overline{OP} = -6\,\text{tg}\,\alpha$

Assim,

$A(\alpha) = \frac{(-6\,\text{tg}\,\alpha) + (-2\,\text{tg}\,\alpha)}{2} \times 4 = \frac{-8\,\text{tg}\,\alpha}{2} \times 4 = -16\,\text{tg}\,\alpha$.

2.2. $A\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -16\,\text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -16\left(-\text{tg}\frac{\pi}{6}\right) = 16\,\text{tg}\frac{\pi}{6} =$

$= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

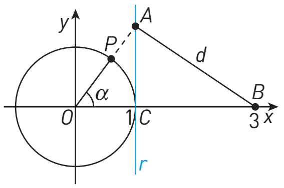
NEMA12CPR2 © Porto Editora

2.3. $A(\alpha) = 16 \Leftrightarrow -16 \operatorname{tg} \alpha = 16 \wedge \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\operatorname{tg} \alpha = -1 \wedge \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$

Pág. 137

12.1.



$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2$

$\Leftrightarrow d^2 = 2^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha$

$\Leftrightarrow d^2 = 4 + \operatorname{tg}^2 \alpha$

$\Leftrightarrow d = \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

12.2. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 9 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 8$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8} \vee \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2} \vee \operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$

Como $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$.

Logo, $d = \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

12.3. $d = \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Leftrightarrow \sqrt{29} = \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Leftrightarrow 29 = 4 + \operatorname{tg}^2 \alpha$

$\Leftrightarrow 25 = \operatorname{tg}^2 \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 5 \vee \operatorname{tg} \alpha = -5$

Como $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\operatorname{tg} \alpha = 5$.

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 5^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\Leftrightarrow 26 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{26}$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} \vee \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26} \vee \cos \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$

Como $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$.

Então, $\sin \alpha = \cos \alpha \times \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26} \times 5 = \frac{5\sqrt{26}}{26}$.

Pág. 138

13.1. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

13.2. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

13.3. $D_g = \left\{x \in]0, \pi[: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge 1 - \operatorname{tg} x \geqslant 0\right\} =$

$= \left\{x \in]0, \pi[: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \operatorname{tg} x \leqslant 1\right\} =$

$= \left]0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

14.1. O contradomínio da função $y = \operatorname{tg} x$ é $\mathbb{R}$, logo, o contradomínio da função f também é $\mathbb{R}$.

14.2. $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 0 \Leftrightarrow -\operatorname{tg}^2 x \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 x \leqslant 1 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 1$

$D'_f =]-\infty, 1]$

14.3. $|\operatorname{tg}(2x)| \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 + |\operatorname{tg}(2x)| \geqslant 2 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 2$

$D'_f = [2, +\infty[$

15. $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} =$

$= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \times 1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \operatorname{tg}^2 x$

$D = \{x \in \mathbb{R}: \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

16.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

16.2. O contradomínio da função $y = x$ é $\mathbb{R}$, logo, o contradomínio da função f também é $\mathbb{R}$.

16.3. No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ só poderão existir assintotas verticais. As equações das assintotas do gráfico de f no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ são $x = -\frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$ porque, por exemplo,

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{6}^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \frac{5\pi}{6}^-} f(x) = +\infty$

16.4. $f\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = -2 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}\left(x - \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -2$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x - \pi) = -3 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -3$

Como $0 < \alpha < \pi$ e $\operatorname{tg} \alpha < 0$, conclui-se que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\Leftrightarrow 10 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \vee \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \vee \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

Como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, conclui-se que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Então, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Pág. 139

17.1. $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

17.2. $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

17.3. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x\,(1 - \operatorname{tg} x) = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in [0\,,\ 2\pi]$, conclui-se que

$x \in \left\{0\,,\ \frac{\pi}{4}\,,\ \pi\,,\ \frac{5\pi}{4}\,,\ 2\pi\right\}$.

18. Os pontos A, B, C e D pertencem ao eixo das abcissas, mas não pertencem ao gráfico de f, porque as suas abcissas não pertencem ao domínio da função f.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \operatorname{tg}^2 x \neq 1\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ \wedge x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Então, $A\left(-\frac{\pi}{2}\,,\ 0\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{4}\,,\ 0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{4}\,,\ 0\right)$ e $D\left(\frac{\pi}{2}\,,\ 0\right)$.

Pág. 140

Tarefa 4

1.1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin(2x) = \cos x \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$ tem-se $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2}$.

Se $k = 1$ tem-se $x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{2}$.

Então, $A\left(\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\,,\ 0\right)$ e $C\left(\frac{5\pi}{6}\,,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.2. Sabe-se, por exemplo, que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$, logo, a função f corresponde à representação gráfica II e a função g corresponde à representação gráfica I.

1.3. $(f - g)(x) < 0 \wedge x \in]0\,,\ \pi[\Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \wedge x \in]0\,,\ \pi[$

$\Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge x \in]0\,,\ \pi[\Leftrightarrow x \in \left]0\,,\ \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{5\pi}{6}\right[$

1.4. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in]6\pi\,,\ 8\pi]$, conclui-se que

$x \in \left\{\frac{37\pi}{6}\,,\ \frac{13\pi}{2}\,,\ \frac{41\pi}{6}\,,\ \frac{15\pi}{2}\right\}$.

2.1.1. $P(\cos\alpha\,,\ \sin\alpha)$ e $m_{OP} = \frac{\sin\alpha - 0}{\cos\alpha - 0} = \operatorname{tg}\alpha$.

Como a reta AP é perpendicular à reta OP, sabe-se que $m_{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. A reta AP é definida por:

$y - \sin\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}(x - \cos\alpha)$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}x + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \sin\alpha$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}x + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \sin\alpha$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}x + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \sin\alpha$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}x + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}x + \frac{1}{\sin\alpha}$

O ponto A pertence à reta AP e tem ordenada nula, logo tem-se:

$0 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}x + \frac{1}{\sin\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\cos\alpha}$

Assim, $A\left(\frac{1}{\cos\alpha}\,,\ 0\right)$.

2.1.2. O ponto B tem a mesma abcissa que o ponto A e a mesma ordenada que o ponto P, logo $B\left(\frac{1}{\cos\alpha}\,,\ \sin\alpha\right)$.

2.2.1. $A_{[OAP]} = \frac{\overline{OA} \times y_P}{2}$, logo

$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{\cos\alpha} \times \sin\alpha}{2} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$.

$A_{[ABP]} = \frac{\overline{PB} \times \overline{AB}}{2}$, logo

$g(\alpha) = \frac{\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) \times \sin\alpha}{2} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha \times \sin\alpha}{2} =$

$= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha\sin\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha\sin\alpha)$

2.2.2. $f(\alpha) = 3 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 6$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + 6^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow 37 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{37}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{37}} \vee \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{37}}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{37}}{37} \vee \cos\alpha = -\frac{\sqrt{37}}{37}$

Como $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, conclui-se que

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{37}}{37}$ e $\sin\alpha = \frac{6\sqrt{37}}{37}$.

Logo, $g(\alpha) = \frac{1}{2}\left(6 - \frac{\sqrt{37}}{37} \times \frac{6\sqrt{37}}{37}\right) = \frac{108}{37}$.

Pág. 141

19.1. O período positivo mínimo da função f é 2π porque 2π é o menor valor positivo T que verifica a condição $f(x + T) = f(x)\,,\ \forall\, x \in D_f$.

19.2. $a = \frac{4\pi}{5} - 2\pi = -\frac{6\pi}{5}$ e $b = \frac{4\pi}{5} + 2\pi = \frac{14\pi}{5}$

20.1.1. $\frac{7\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} = \frac{-3\pi + 2k\pi}{6} \Leftrightarrow 7\pi = (-3 + 2k)\pi$

$\Leftrightarrow 7 = -3 + 2k \Leftrightarrow k = 5$

20.1.2. $\frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{14\pi}{12} = \frac{3\pi + 4k\pi}{12} \Leftrightarrow 14\pi = (3 + 4k)\pi$

$\Leftrightarrow 14 = 3 + 4k \Leftrightarrow k = \frac{11}{4}$

20.2. $g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = g\left(-\frac{\pi}{2} + 5 \times \frac{\pi}{3}\right) \underset{(*)}{=} g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

(*) porque $\frac{\pi}{3}$ é o período positivo mínimo da função g.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 142

21.1. $f(x) = \sin(3x) = \sin(3x + 2\pi) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$\frac{2\pi}{3}$ é o período positivo mínimo da função f.

21.2. $f(x) = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \sin\left(-\frac{x}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}(x + 4\pi)\right) =$

$= f(x + 4\pi)$ 4π é o período positivo mínimo da função f.

21.3. $f(x) = 1 + \cos(\pi x) = 1 + \cos(\pi x + 2\pi) = 1 + \cos(\pi(x + 2))$

$= f(x + 2)$ 2 é o período positivo mínimo da função f.

22.1. Seja T o período positivo mínimo da função h.
Então, por observação gráfica, concluiu-se que:

$2T = \frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow 2T = \frac{16\pi}{12} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{3}$

22.2. $c = \frac{7\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$, $b = \frac{19\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$ e

$a = \frac{11\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$.

23.1. $\frac{2\pi}{|a|}$ é o período positivo mínimo de f, logo, tem-se

$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |a| = 4 \Leftrightarrow a = 4 \vee a = -4$.

Atendendo ao sinal da função f, conclui-se que $a = 4$.

23.2. $\frac{2\pi}{|a|}$ é o período positivo mínimo de g, logo, tem-se

$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |a| = 4 \Leftrightarrow a = 4 \vee a = -4$.

Atendendo ao sinal da função g, conclui-se que $a = -4$.

23.3. $\frac{2\pi}{|a|}$ é o período positivo mínimo de h, logo, tem-se

$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow |a| = 3 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -3$.

Atendendo ao sinal da função h, conclui-se que $a = 3$.

Pág. 143

24.1. $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\left((x + 2\pi) - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= f(x + 2\pi)$

2π é o período positivo mínimo da função f.

24.2. $f(x) = 1 + \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \sin\left(3x + \frac{\pi}{6} + 2\pi\right) =$

$= 1 + \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right) = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$\frac{2\pi}{3}$ é o período positivo mínimo da função f.

24.3. $f(x) = 2 - \cos\left(4x - \frac{4\pi}{3}\right) = 2 - \cos\left(4x - \frac{4\pi}{3} + 2\pi\right)$

$= 2 - \cos\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4\pi}{3}\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2}$ é o período positivo mínimo da função f.

24.4. $f(x) = \operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(2x + \pi) = \operatorname{tg}\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2}$ é o período positivo mínimo da função f.

24.5. $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}(x + 3\pi)\right) = f(x + 3\pi)$

3π é o período positivo mínimo da função f.

24.6. $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$

$= f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2}$ é o período positivo mínimo da função f.

25.1. As coordenadas do vetor associado à translação que transforma o gráfico de $y = \cos(2x)$ no gráfico de $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ são $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$.

25.2. As coordenadas do vetor associado à translação que transforma o gráfico de $y = \cos(3x)$ no gráfico de $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ são $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$.

25.3. As coordenadas do vetor associado à translação que transforma o gráfico de $y = \operatorname{tg}(2x)$ no gráfico de $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ são $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$.

25.4. As coordenadas do vetor associado à translação que tran forma o gráfico de $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ no gráfico de $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ são $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$.

26. A função h corresponde ao gráfico **IV** porque $h(0) = -1$.

Como $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} j(x) = -1$,

conclui-se que a função f corresponde ao gráfico **III**, a função g corresponde ao gráfico **II** e a função j corresponde ao gráfico **I**.

Pág. 144

Tarefa 5

1.1.1. A transformação geométrica aplicada na passagem da representação **I** para a representação **II** é uma simetria em relação a Ox.

1.1.2. A transformação geométrica aplicada na passagem da representação **II** para a representação **III** é uma translação horizontal associada ao vetor $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

1.2. $f(x) = \cos(2x) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2(x + \pi)) = f(x + \pi)$

π é o período positivo mínimo da função f.

2. $-1 \leqslant \sin\left(bx + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow a - 1 \leqslant a + \sin\left(bx + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant a + 1$

$\Leftrightarrow a - 1 \leqslant f(x) \leqslant a + 1$

Então, $D'_f = [a - 1, a + 1]$.

Por observação gráfica sabe-se que $D'_f = [2, 4]$, logo, conclui-se que $a = 3$.

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{11\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Leftrightarrow |b| = 2 \Leftrightarrow b = 2 \vee b = -2$

Como $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2$, conclui-se que $b = -2$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

3.1. $g(0) = 0 \Leftrightarrow -1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -1 + c \times \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow c = 2$

$\frac{2\pi}{|d|} = \frac{10\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{|d|} = 4\pi \Leftrightarrow |d| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow d = \frac{1}{2} \vee d = -\frac{1}{2}$

Como $g\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 1$, conclui-se que $d = \frac{1}{2}$.

3.2. $g(x) = 0 \wedge x \in [2\pi\ ,\ 3\pi]$

$\Leftrightarrow -1 + 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \wedge x \in [2\pi\ ,\ 3\pi]$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \wedge x \in [2\pi\ ,\ 3\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right) \wedge$

$\wedge\ x \in [2\pi\ ,\ 3\pi] \Leftrightarrow$

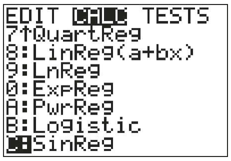
$\Leftrightarrow \left(x = 4k\pi \vee x = -\frac{4\pi}{3} + 4k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [2\pi\ ,\ 3\pi]$

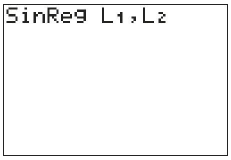
$\Leftrightarrow x = \frac{8\pi}{3}$

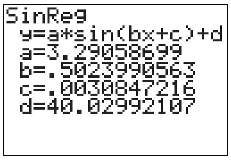
Pág. 145

Tarefa 6

1.1. Depois de inserirmos os dados registados na tabela em duas listas da calculadora, por exemplo nas listas L1 e L2, procedemos da seguinte forma:

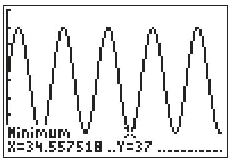


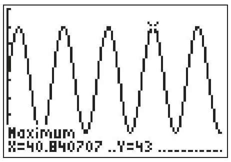




Podemos considerar, por exemplo, $d(t) = 40 + 3\sin(0{,}5t)$.

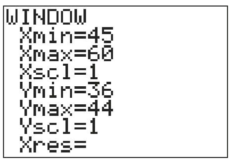
1.2.

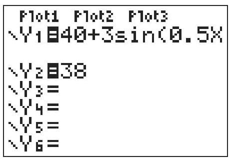


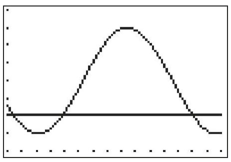


Durante o tempo de ondulação, e de acordo com o modelo obtido, a maior e a menor distância da rolha ao fundo do reservatório foram, respetivamente, 43 e 37 cm .

1.3.







Nos últimos 15 s de ondulação, a distância da rolha ao fundo do reservatório foi igual a 38 cm três vezes.

2.1. $-1 \leqslant \cos(0{,}4t) \leqslant 1 \Leftrightarrow -2{,}5 \leqslant 2{,}5\cos(0{,}4t) \leqslant 2{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40 - 2{,}5 \leqslant 40 + 2{,}5\cos(0{,}4t) \leqslant 40 + 2{,}5$

$\Leftrightarrow 37{,}5 \leqslant d(t) \leqslant 42{,}5$

A distância máxima da rolha ao fundo do reservatório é de 42,5 cm .

$d(t) = 42{,}5 \Leftrightarrow 40 + 2{,}5\cos(0{,}4t) = 42{,}5 \Leftrightarrow \cos(0{,}4t) = 1$

$\Leftrightarrow 0{,}4t = 0 + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 5k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 1$ tem-se $x = 5\pi$; $x \approx 16$.

Após o início da experiência, a distância da rolha ao fundo do reservatório é máxima, pela primeira vez, ao fim de aproximadamente 16 s .

2.2. A distância máxima da rolha ao fundo do reservatório é de 37,5 cm .

$d(t) = 37{,}5 \Leftrightarrow 40 + 2{,}5\cos(0{,}4t) = 37{,}5$

$\Leftrightarrow \cos(0{,}4t) = -1 \Leftrightarrow 0{,}4t = \pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{2} + 5k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 3$ tem-se $x = \frac{35\pi}{2}$; $x \approx 55$.

Faltavam aproximadamente 5 s para o fim da experiência quando, pela última vez, a distância da rolha ao fundo do reservatório foi mínima.

2.3. O período positivo mínimo da função é $\frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi$.

Logo, $p - \frac{\pi}{7} = 5\pi \Leftrightarrow p = \frac{36\pi}{7}$.

Pág. 147

Tarefa 7

1.1. O ponto P parte do ponto T , no instante $t = 0$, com velocidade angular constante, demorando 12 s a dar uma volta completa; então, a sua velocidade angular é

$w = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ rad/s .

1.2. A abcissa do ponto P' é igual à abcissa do ponto P e a ordenada do ponto P'' é igual à ordenada do ponto P .

Como a circunferência tem 5 cm de raio, sabe-se que as coordenadas do ponto P são $(5\cos\theta\ ,\ 5\sin\theta)$.

Sabe-se que $\theta = \frac{\pi}{6}t$.

Logo, a abcissa do ponto P' e a ordenada do ponto P'' são dadas por $x = 5\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ e $y = 5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$.

2.1. A velocidade angular é de $\frac{\pi}{3}$ rad/s .

2.2. A abcissa do ponto P é dada por

$f(0) = 5\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Conclui-se então que $\theta = \frac{\pi}{4}$ e que a ordenada do ponto P é igual à sua abcissa.

Assim, as coordenadas do ponto onde se iniciou o movimento são $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.3. O período positivo mínimo da função f é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$. Significa que, de 6 em 6 , o ponto P se encontra na mesma posição.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 148

27. Para provar que não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ basta atender à periodicidade da função $y = \sin x$.

Por exemplo, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$ e

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$.

28.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x} = 0$ Sabe-se que $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Quando x tende para $+\infty$, tem-se $\dfrac{0}{x} \leqslant \dfrac{\sin^2 x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{0}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, necessariamente

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x} = 0$.

28.2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

28.3. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x - \operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(2 - \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)\right) = 2 - (+\infty) = -\infty$$

28.4. $$\lim_{x \to \pi} \frac{x}{1 - \cos x} = \frac{\pi}{1 - (-1)} = \frac{\pi}{2}$$

28.5. $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

Pág. 149

29.1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2\right) = 1 \times 2 = 2$$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $2x \longrightarrow 0$.

29.2. $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(-x)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

29.3. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi + x)}{3x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

$$= -\frac{1}{3} \times 1 = -\frac{1}{3}$$

29.4. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{5x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} 5 \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}} = 5 \times \frac{2}{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}} =$$

$= 5 \times \dfrac{2}{1} = 10$ *Nota*: Quando $x \longrightarrow 0$, também $\dfrac{x}{2} \longrightarrow 0$.

29.5. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - \sin\left(\frac{x}{4}\right)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 - \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}} \times \frac{1}{4}\right) = 1 \times 2 - 1 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $2x \longrightarrow 0$ e $\dfrac{x}{4} \longrightarrow 0$.

29.6. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi - 4x)}{\sin(\pi + x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{-\sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin(4x)}{4x} \times \frac{x}{\sin x} \times (-4)\right] = 1 \times 1 \times (-4) = -4 =$$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $4x \longrightarrow 0$.

29.7. $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin(-6x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{-\sin(6x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \times \frac{6x}{\sin(6x)} \times \frac{1}{6}\right] = 1 \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $6x \longrightarrow 0$.

30. $$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(-4x)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\sin(-4x)}{-4x} \times (-2)\right) = 1 \times (-2) = -2$$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $4x \longrightarrow 0$.

f é contínua à esquerda de zero porque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\big(1 - \cos(2x)\big)\big(1 + \cos(2x)\big)}{x^2\big(1 + \cos(2x)\big)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos^2(2x)}{x^2\,\big(1 + \cos(2x)\big)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{4}{1 + \cos(2x)}\right) = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

f é descontínua à direita de zero porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$.

Pág. 150

31.1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2}{\cos(2x)}\right) =$$

$= 1 \times 2 = 2$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $2x \longrightarrow 0$.

31.2. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\pi - x)}{x - \frac{\pi}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \to 0} \frac{-\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Mudança de variável: Fazendo $x - \dfrac{\pi}{2} = y$, vem $x = y + \dfrac{\pi}{2}$.

Se $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$, então $y \longrightarrow 0$.

31.3. $$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{2x - 2\pi} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\sin(-y)}{2y} = \lim_{y \to 0} \frac{-\sin y}{2y} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

Mudança de variável: Fazendo $x - \pi = y$, vem $x = y + \pi$.

Se $x \longrightarrow \pi$, então $y \longrightarrow 0$.

31.4. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-\sin y}{y} = -1$$

Mudança de variável: Fazendo $x - \dfrac{\pi}{4} = y$, vem $x = y + \dfrac{\pi}{4}$.

Se $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$, então $y \longrightarrow 0$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

31.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{|\sin x|}{x}\right) = -\infty$ **31.6.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = -\infty$

31.7. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\sin y}{y} = 1$

Mudança de variável:

Fazendo $\dfrac{1}{x} = y$, vem $x = \dfrac{1}{y}$.

Se $x \longrightarrow +\infty$, então $y \longrightarrow 0^+$.

32.1. $f(x) = \dfrac{2x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} = \dfrac{2x - \sin x}{x}$

$f(-x) = \dfrac{2(-x) - \sin(-x)}{-x} = \dfrac{-2x + \sin x}{-x} = \dfrac{2x - \sin x}{x} =$

$= f(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Logo, f é uma função par.

32.2. f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ por ser o quociente entre duas funções contínuas, logo, a existir assintota vertical, esta será a reta de equação $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0}\left(2 - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 2 - 1 = 1$

Logo, a reta de equação $x = 0$ não é assintota vertical do gráfico de f.

32.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 - \dfrac{\sin x}{x}\right) =$

$= 2 - 0 = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(2 - \dfrac{\sin x}{x}\right) =$

$= 2 - 0 = 2$

Logo, o gráfico de f tem uma única assintota horizontal, a reta de equação $y = 2$.

Pág. 151

33. $\overline{AP}^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 25 \Leftrightarrow \overline{AP} = 5$ e

$\overline{AC}^2 = 4^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 41 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{41}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$

$= \dfrac{4}{\sqrt{41}} \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{5}{\sqrt{41}} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{16}{5\sqrt{41}} + \dfrac{15}{5\sqrt{41}} = \dfrac{31}{5\sqrt{41}}$

$= \dfrac{31 \times \sqrt{41}}{5\sqrt{41} \times \sqrt{41}} = \dfrac{31\sqrt{41}}{205}$

34. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - k\right) = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{6}\cos k + \sin\dfrac{\pi}{6}\sin k = \dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos k + \dfrac{1}{2}\sin k = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos k + \sin k = \dfrac{4}{5}$

Pág. 152

Tarefa 8

1.1. $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) =$

$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$

$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha(-\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1.2. $\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

1.3. $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) =$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha(-\sin\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

1.4.1. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$

$= \dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} =$

$= \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

1.4.2. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} =$

$= \dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} =$

$= \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

2.1₆. $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$

2.2. $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x =$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

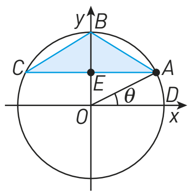
2.3. $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(x + x) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \times \operatorname{tg} x} = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

3. $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BE}}{2} = \dfrac{\overline{AC} \times (\overline{OB} - \overline{OE})}{2}$

$f(\theta) = \dfrac{2\cos\theta \times (1 - \sin\theta)}{2}$

$\dfrac{2\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta}{2}$

$= \dfrac{2\cos\theta - \sin(2\theta)}{2} = \cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$



Pág. 153

35.1. $f'(\pi) = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x - 0}{x - \pi} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin(y + \pi)}{y} =$

$= \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-\sin y}{y} = -1$

Mudança de variável:

Fazendo $x - \pi = y$, vem $x = y + \pi$.

Se $x \longrightarrow \pi$, então $y \longrightarrow 0$.

35.2. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(2x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\cos(2y) - 1}{y} =$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$= -\lim_{y \to 0} \frac{1-\cos(2y)}{y} = -\lim_{y \to 0} \frac{\left(1-\cos(2y)\right)\left(1+\cos(2y)\right)}{y\left(1+\cos(2y)\right)} =$$

$$= -\lim_{y \to 0} \frac{1-\cos^2(2y)}{y\left(1+\cos(2y)\right)} = -\lim_{y \to 0} \frac{\sin^2(2y)}{y\left(1+\cos(2y)\right)} =$$

$$= -2\lim_{y \to 0}\left(\frac{\sin(2y)}{2y} \times \frac{\sin(2y)}{1+\cos(2y)}\right) = -2 \times 1 \times \frac{0}{2} = 0$$

Mudança de variável: Fazendo $x - \frac{\pi}{4} = y$, vem $x = y + \frac{\pi}{4}$.

Se $x \longrightarrow \frac{\pi}{4}$, então $y \longrightarrow 0$.

36.1. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin(x) - \frac{\pi}{2} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}}\right) = 1 + \lim_{y \to 0} \frac{\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{y} =$$

$$= 1 + \lim_{y \to 0} \frac{\cos y - 1}{y} = 1 + \lim_{y \to 0} \frac{(\cos y - 1)(\cos y + 1)}{y(\cos y + 1)} =$$

$$= 1 + \lim_{y \to 0} \frac{\cos^2 y - 1}{y(\cos y + 1)} = 1 - \lim_{y \to 0} \frac{\sin^2 y}{y(\cos y + 1)} =$$

$$= 1 - \lim_{y \to 0}\left(\frac{\sin y}{y} \times \frac{\sin y}{(\cos y + 1)}\right) = 1 - 1 \times 0 = 1$$

Mudança de variável: Fazendo $x - \frac{\pi}{2} = y$, vem $x = y + \frac{\pi}{2}$.

Se $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, então $y \longrightarrow 0$.

36.2. Sabe-se que $m_t = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e que o ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ tem ordenada $\frac{\pi}{2} + 1$. A reta t é definida por

$$y - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 1 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Então, a reta t interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0,\ 1)$.

Pág. 154

37.1. $f'(x) = \left(\frac{x}{2} - \sin x\right)' = \frac{1}{2} - \cos x$

37.2. $f'(x) = \left(\sin(2x)\right)' = 2\cos(2x)$

37.3. $f'(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = -\frac{\pi}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

37.4. $f'(x) = \left(x^2 \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' =$

$$= 2x\sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + x^2\left(-\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2x\sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) - x^2\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$$

37.5. $f'(x) = \left(\sqrt{1 - \sin(\pi x)}\right)' = \frac{-\pi\cos(\pi x)}{2\sqrt{1 - \sin(\pi x)}}$

38. $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2} + \sin x}\right)' = \left(\frac{1}{2} + \cos x\right)e^{\frac{x}{2} + \sin x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \cos x\right)e^{\frac{x}{2} + \sin x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

Como $x \in [0,\ 2\pi]$, conclui-se que $x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f'	+	+	0	−	0	+	+
f	$f(0)$	↗	$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	↘	$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	↗	$f(2\pi)$

Conclui-se, então que $a = \frac{2\pi}{3}$ e $b = \frac{4\pi}{3}$.

39.1. $g'(x) = \left(\frac{\sin x}{2 + \sin x}\right)' = \frac{\cos x\,(2 + \sin x) - \sin x \cos x}{(2 + \sin x)^2} =$

$$= \frac{2\cos x + \cos x \sin x - \sin x \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(2 + \sin x)^2}$$

39.2. Sendo a reta tangente paralela ao eixo das abcissas, então o seu declive é nulo.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x}{(2 + \sin x)^2} = 0 =$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x = 0 \wedge \underbrace{(2 + \sin x)^2 \neq 0}_{\text{cond. universal}} \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Em cada intervalo do tipo $[2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ há dois zeros da função derivada.
Assim, no intervalo $[460\pi,\ 551\pi]$
($551\pi - 460\pi = 91\pi = 45{,}5 \times 2\pi$, o que corresponde a 45 voltas e meia) há 91 zeros da função derivada, ou seja, há 91 pontos do gráfico de h em que a reta tangente ao gráfico em cada um desses pontos é paralela ao eixo Ox.

Pág. 155

40.1. $f'(x) = \left(1 + \frac{\cos x}{2}\right)' = -\frac{\sin x}{2}$

40.2. $f'(x) = \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

40.3. $f'(x) = \left(x^2\cos(3x)\right)' = 2x\cos(3x) - 3x^2\sin(3x)$

40.4. $f'(x) = (x\,e^{\cos x})' = 1e^{\cos x} + x\,(-\sin x)\,e^{\cos x} = e^{\cos x}(1 - x\sin x)$

40.5. $f'(x) = \left(\ln(\cos(3x - \pi))\right)' = \frac{-3\sin(3x - \pi)}{\cos(3x - \pi)} = -3\,\mathrm{tg}(3x - \pi)$

41.1. $f'(x) = \left(\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= -\sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(2x)$$

41.2. Sendo $k \in \mathbb{Z}$, então $f'\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.

O declive das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ é nulo, logo, essas retas são paralelas ao eixo das abcissas.

42.1. $g(x) = x - \sin x \cos x = x - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x) = x - \frac{1}{2}\sin(2x)$

42.2. A reta t é paralela ao eixo Ox e tangente ao gráfico no ponto A, logo $g'(x_A) = 0$.

$$g'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right)' = 1 - \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) = 1 - \cos(2x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

O menor zero positivo da função derivada de g é π.
Então, como $g(\pi) = \pi$, conclui-se que $A(\pi,\ \pi)$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

42.3. $g''(x) = \left(1-\cos(2x)\right)' = 0-\left(-2\sin(2x)\right) = 2\sin(2x)$

$g''(x)=0 \Leftrightarrow 2\sin(2x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=0$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi\ ,\ k\in Z \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Todos os pontos de abcissa $x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ são pontos de inflexão do gráfico de g uma vez que são pontos onde há mudança de sinal da função g'' (segunda derivada); logo, o gráfico de g tem um número infinito de pontos de inflexão.

Pág. 156

43.1. $f'(x) = \left(x+\operatorname{tg}(3x)\right)' = 1+\frac{3}{\cos^2(3x)}$

43.2. $f'(x) = (x\operatorname{tg}^2 x)' = 1\times\operatorname{tg}^2 x + x\,2\operatorname{tg}x\,\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + \frac{2x\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}$

43.3. $f'(x) = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{x^2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

43.4. $f'(x) = \left[(1-\operatorname{tg}x)^2\right]' = 2(1-\operatorname{tg}x)\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{-2+2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}$

43.5. $f'(x) = \left[x+\operatorname{tg}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\right]' = 1+\frac{2\times\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} = 1+\frac{x}{2\cos^2\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}$

44.1. $h'(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)' = \frac{0-\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

44.2.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
h'	s.s.	$-$	s.s.	$-$	s.s.
h	s.s.	$+\infty \searrow 0^+$	s.s.	$0^- \searrow -\infty$	s.s.

Por observação da tabela conclui-se que h é decrescente em $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right[$.

44.3. $h''(x) = \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = \left(-\sin^{-2}x\right)' =$

$= -(-2)\sin^{-3}x\cos x = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

$h''(x)\neq 0\ ,\ \forall\, x\in\left]0\ ,\ \pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
h''	s.s.	$+$	s.s.	$-$	s.s.
h	s.s.	$\cup$	s.s.	$\cap$	s.s.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ e voltada para baixo em $\left]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right[$.

Não tem pontos de inflexão.

45.1. $f'(x) = (kx+4\operatorname{tg}x)' = k+\frac{4}{\cos^2 x}$

$f''(x) = \left(k+\frac{4}{\cos^2 x}\right)' = 0+\frac{0-4\times 2\cos x\,(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{8\sin x}{\cos^3 x}$

$f''(x)=0 \wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \frac{8\sin x}{\cos^3 x}=0 \wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f''	s.s.	$-$	0	$+$	s.s.
f	s.s.	$\cap$	$f(0)=0$	$\cup$	s.s.

Então, qualquer função da família tem um ponto de inflexão em $x=0$.

45.2. Sendo $k=-8$, então $f'(x) = (-8x+4\operatorname{tg}x)' = -8+\frac{4}{\cos^2 x}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow = -8+\frac{4}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $x=-\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{\pi}{4}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	s.s.	$+$	0	$-$	0	$+$	s.s.
f	s.s.	$\nearrow$	$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\nearrow$	s.s.

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi-4$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\pi+4$

A função f tem um máximo relativo igual a $2\pi-4$ para $x=-\frac{\pi}{4}$ e um mínimo relativo igual a $-2\pi+4$ para $x=\frac{\pi}{4}$.

Pág. 157

Tarefa 9

1.1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2}=0$

Nota: Quando $x\longrightarrow 0$, também $\frac{x}{2}\longrightarrow 0$.

1.1.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right) =$

$=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

1.2. Os declives das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa $x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ são dados por $f'(2k\pi)\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

$f'(x) = \left(\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$f'(2k\pi) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(k\pi)$

Se k é ímpar então $f'(2k\pi) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times x\,(-1) = 1$

e se k é par então $f'(2k\pi) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 1 = 0$.

Então, as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa $x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares ou ao eixo Ox.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

1.3.1. $f'(-x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{-x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=f'(x)$.

Logo, a função f' é par.

1.3.2. $f''(x)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=0-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$f''(-x)=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{-x}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)=-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-f''(x)$.

Logo, a função f'' é ímpar.

1.3.3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)=1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=0+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=4k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

Logo, a função f' tem um número infinito de zeros.
No entanto, a função f não tem extremos porque

$f'(x)\geqslant 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

1.3.4. $f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

x	...	-4π		-2π		0		2π		4π	...
f''		0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	
f		-2π	$\cup$	$-\pi$	$\cap$	0	$\cup$	π	$\cap$	2π	

Os pontos de abcissa $x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

2.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)-2\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x-2)=0$

$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee 2\sin x-2=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \vee \sin x=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in[0\ ,\ 2\pi]$, conclui-se que $x=\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{3\pi}{2}$.

Então, $B\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$ e $D\left(\frac{3\pi}{2}\ ,\ 0\right)$.

2.2. $f'(x)=(\sin(2x)-2\cos x)'=2\cos(2x)+2\sin x=$

$=2\cos^2 x-2\sin^2 x+2\sin x=$

$=2(1-\sin^2 x)-2\sin^2 x+2\sin x=-4\sin^2 x+2\sin x+2$

2.3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x+2\sin x+2=0$

$\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \vee \sin x=1$

Como $x\in[0\ ,\ 2\pi]$, conclui-se que

$x=\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{7\pi}{6} \vee x=\frac{11\pi}{6}$. Zeros de f' : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$

Tabela de variação da função f :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
f'	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
f	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	-2

2.4. As abcissas dos pontos C e D são $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ e as ordenadas são $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, respetivamente.

Assim, $C\left(\frac{7\pi}{6}\ ,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ e $E\left(\frac{11\pi}{6}\ ,\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.5. $f''(x)=(2\cos(2x)+2\sin x)'=2(-2)\sin(2x)+2\cos x=$

$=-4\sin(2x)+2\cos x$

2.6. A função f'' é contínua em $[0\ ,\ 2\pi]$, em particular é contínua em $\left[\frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right]$.

$f''\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=-2\sqrt{3}-1$

$f''\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-4\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=$

$=-4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$

Como função f'' é contínua em $\left[\frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right]$ e

$f''\left(\frac{4\pi}{3}\right)<0<f''\left(\frac{11\pi}{6}\right)$,

então, pelo Teorema de Bolzano conclui-se que

$\exists\, c\in\left]\frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right[\ :\ f''(c)=0$.

Como a segunda derivada da função f passa de negativa a positiva, no intervalo $\left]\frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right[$, conclui-se que o gráfico de f admite um ponto ponto de inflexão pertencente ao intervalo $\left]\frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right[$.

Pág. 158

Tarefa 10

1.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 1-\cos x>0\}=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x<1\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x\neq 1\}=\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}:\ x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$

1.2.1. $f(-x)=\ln\left(1-\cos(-x)\right)=\ln(1-\cos x)=f(x)\ ,\ \forall x\in D_f$.

Logo, a função f é par.

1.2.2. $f(x)=\ln(1-\cos x)=\ln\left(1-\cos(x+2\pi)\right)=$

$=f(x+2\pi)\ ,\ \forall x\in D_f$.

Logo, f é função periódica de período positivo mínimo 2π .

1.3. Como o domínio da função g é o intervalo $]0\ ,\ 2\pi[$, o seu gráfico só poderá admitir assintotas verticais.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(1-\cos x)\right]=-\infty$ e

$\lim\limits_{x\to 2\pi^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2\pi^-}\left[\ln(1-\cos x)\right]=-\infty$

As retas de equação $x=0$ e $x=2\pi$ são assintotas verticais do gráfico da função f .
Como a função g é contínua no seu domínio, o seu gráfico não admite mais nenhuma assintota vertical.

1.4. As assintotas do gráfico de f são as retas de equações $x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

1.5. $g'(x)=f'(x)=\left[\ln(1-\cos x)\right]'=\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{1-\cos x}=0 \wedge x\in\,]0\ ,\ 2\pi[\ 4$

$\Leftrightarrow \sin x=0 \wedge \cos x\neq 1 \wedge x\in\,]0\ ,\ 2\pi[\ \Leftrightarrow x=\pi$

A tabela de variação da função g é:

x	0	π	2π
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Então, f é estritamente crescente em $]0 + 2k\pi\,,\ \pi + 2k\pi[$ e é estritamente decrescente em $]\pi + 2k\pi\,,\ 2\pi + 2k\pi[\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

A função f tem um máximo absoluto igual a $\ln 2$.

1.6. $g''(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1 - \cos x}\right)' = \dfrac{\cos x\,(1 - \cos x) - \sin x \sin x}{(1 - \cos x)^2} =$

$= \dfrac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} = \dfrac{\cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 - \cos x)^2} =$

$= \dfrac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} = \dfrac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2} = \dfrac{-1}{1 - \cos x} =$

$= \dfrac{\cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 - \cos x)^2} = \dfrac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} =$

$= \dfrac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2} = \dfrac{-1}{1 - \cos x}$

$g''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in\,]0\,,\ 2\pi[$

x	0	2π
g''	–	
g	$\frown$	

Então, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo e não tem pontos de inflexão.

2.1. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\sin x + \cos x}{2} - \dfrac{1}{2}}{x} =$

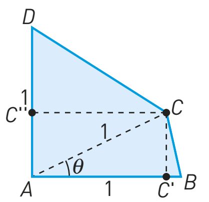
$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + \cos x - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{2x} =$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{2x\,(\cos x + 1)} =$

$= \dfrac{1}{2} \times 1 + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{2x\,(\cos x + 1)} = \dfrac{1}{2} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin^2 x}{2x\,(\cos x + 1)} =$

$= \dfrac{1}{2} + \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{-\sin x}{2\,(\cos x + 1)}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{0}{4} = \dfrac{1}{2}$

2.2.1.



$A_{[ABCD]} = A_{[ABC]} + A_{[ACD]} =$

$= \dfrac{\overline{AB} \times \overline{CC'}}{2} + \dfrac{\overline{AD} \times \overline{CC''}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{\overline{CC'}}{1}$

$\Leftrightarrow \overline{CC'} = \sin\theta$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\overline{CC''}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{\overline{CC''}}{1} \Leftrightarrow \overline{CC''} = \cos\theta$

Então, $f(\theta) = \dfrac{1 \times \sin\theta}{2} + \dfrac{1 \times \cos\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{2}$.

2.2.2. $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{2} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}$

O valor exato da área do quadrilátero $[ABCD]$ é $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}$.

2.2.3. $\lim\limits_{\theta \to 0^+} f(\theta) = \lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} f(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{2} = \dfrac{1}{2}$

Então, $\lim\limits_{\theta \to 0^+} f(\theta) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(\theta)$.

Em ambos os casos, os limites representam a área do triângulo $[ABD]$.

2.2.4. $f'(\theta) = \left(\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{2}\right)' = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{2}$

$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{2} = 0 \wedge \theta \in \left]0\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \sin\theta \wedge \theta \in \left]0\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	+	0	–
f	↗	$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$	↘

A área do quadrilátero é máxima quando $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Pág. 159

Tarefa 11

1. $h'(x) = \left(\dfrac{3\cos x + 1}{2 - \cos x} + 4\right)' =$

$= \dfrac{-3\sin x\,(2 - \cos x) - (3\cos x + 1)(\sin x)}{(2 - \cos x)^2} =$

$= \dfrac{-6\sin x + 3\sin x\cos x - 3\cos x\sin x - \sin x}{(2 - \cos x)^2} = \dfrac{-7\sin x}{(2 - \cos x)^2}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-7\sin x}{(2 - \cos x)^2} = 0$

$\Leftrightarrow -7\sin x = 0 \wedge \underbrace{(2 - \cos x)^2 \neq 0}_{\text{cond. universal}} \Leftrightarrow \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Como a função h é uma função periódica de período positivo mínimo 2π, vamos apenas fazer o estudo da função no intervalo $[0\,,\ 2\pi]$.

$h'(x) = 0 \wedge x \in [0\,,\ 2\pi] \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

x	0		π		2π
h'	0	–	0	+	0
h	$h(0)$	↘	$h(\pi)$	↗	$h(2\pi)$

$h(0) = h(2\pi) = \dfrac{3 + 1}{2 - 1} + 4 = 8$ e

$h(\pi) = \dfrac{-3 + 1}{2 - (-1)} + 4 = -\dfrac{2}{3} + 4 = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}33$

O máximo da função é igual a 8 e o mínimo é, aproximadamente igual a $3{,}33$. Daqui pode concluir-se que cada coluna de reforço tem 8 m de altura e que a parte mais baixa do muro tem, aproximadamente, $3{,}33$ m de altura.

A distância entre maximizantes é igual a 2π, ou seja, é, aproximadamente igual a $6{,}28$ m.

As colunas de reforço correspondem aos pontos de abcissas $x = 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0\,,\ 160]$.

Dado que $\dfrac{160}{2\pi} \approx 25{,}46$, então tem-se $x \in \{0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ 25\}$.

Assim sendo, conclui-se que existem 26 colunas de reforço. Como o muro tem 160 m de comprimento, a altura do muro na parte final é dada por $h(160)$.

$h(160) = \dfrac{3\cos 160 + 1}{2 - \cos 160} + 4 \approx 3{,}35$

Então, a altura do muro na parte final é, aproximadamente igual a $3{,}35$ m.

2.1.1. $\overline{PM} = \sqrt{225} = 15$ m e $A_{[AEFCD]} = A_{[ABCD]} - A_{[EBF]}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$\operatorname{tg} x = \frac{15}{\overline{EM}} \Leftrightarrow \overline{EM} = \frac{15}{\operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \overline{EM} = \frac{15\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{FQ}}{15} \Leftrightarrow \overline{FQ} = 15 \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \overline{FQ} = \frac{15\sin x}{\cos x}$$

Logo, $A(x) = 100 \times 60 - \dfrac{\left(\frac{15\cos x}{\sin x} + 15\right)\left(15 + \frac{15\sin x}{\cos x}\right)}{2} =$

$$= 6000 - \frac{\frac{225\cos x}{\sin x} + 225 + 225 + \frac{225\sin x}{\cos x}}{2} =$$

$$= 6000 - 225 - \frac{\frac{225\cos x}{\sin x} + \frac{225\sin x}{\cos x}}{2} =$$

$$= 5775 - \frac{\frac{225\cos^2 x + 225\sin^2 x}{\sin x\cos x}}{2} =$$

$$= 5775 - \frac{225(\cos^2 x + \sin^2 x)}{2\sin x\cos x} = 5775 - \frac{225 \times 1}{\sin(2x)} =$$

$$= 5775 - \frac{225}{\sin(2x)}$$

2.1.2. $\overline{AE} = 100 - \left(\dfrac{15\cos x}{\sin x} + 15\right) = 85 - \dfrac{15\cos x}{\sin x}$

$$\overline{CF} = 60 - \left(\frac{15\sin x}{\cos x} + 15\right) = 45 - \frac{15\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = \frac{15}{\overline{EP}} \Leftrightarrow \overline{EP} = \frac{15}{\sin x} \text{ e } \cos x = \frac{15}{\overline{PF}} \Leftrightarrow \overline{PF} = \frac{15}{\cos x}$$

$$P(x) = 100 + 60 + 85 - \frac{15\cos x}{\sin x} + \frac{15}{\sin x} + \frac{15}{\cos x} +$$

$$+ 45 - \frac{15\sin x}{\cos x} = 290 + \frac{15 - 15\cos x}{\sin x} + \frac{15 - 15\sin x}{\cos x} =$$

$$= 290 + \frac{(15 - 15\cos x)\cos x + (15 - 15\sin x)\sin x}{\sin x\cos x} =$$

$$= 290 + \frac{15\cos x - 15\cos^2 x + 15\sin x - 15\sin^2 x}{\sin x\cos x} =$$

$$= 290 + \frac{-15 + 15\cos x + 15\sin x}{\sin x\cos x} =$$

$$= 290 - \frac{15(1 - \cos x - \sin x)}{\sin x\cos x} = 290 - \frac{30(1 - \cos x - \sin x)}{2\sin x\cos x} =$$

$$= 290 - \frac{30(1 - \cos x - \sin x)}{\sin(2x)}$$

2.2. $A'(x) = \left(5775 - \dfrac{225}{\sin(2x)}\right)' = 0 - \dfrac{0 - 225 \times 2\cos(2x)}{(\sin(2x))^2} =$

$$= \frac{450\cos(2x)}{(\sin(2x))^2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{450\cos(2x)}{(\sin(2x))^2} = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $x = \frac{\pi}{4}$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
A'	$+$	0	$-$
A	$\nearrow$	$A\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\searrow$

A área do pentágono $[AEFCD]$ é máxima quando $x = \frac{\pi}{4}$.

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = 290 - \frac{30\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= 290 - \frac{30\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1} = 290 - 30 + 30\sqrt{2} = 260 + 30\sqrt{2}$$

Conclui-se que o pentágono $[AEFCD]$ que tem área máxima tem de perímetro $(260 + 30\sqrt{2})$ m.

Pág. 160

Tarefa 12

1. $h(0) = 40 + 50e^{-0,2\times 0}\cos(0) = 40 + 50 = 90$

O concorrente saltou de 90 metros de altura.

2. $h(t) = 40 \wedge 0 \leqslant t \leqslant 10$

$$\Leftrightarrow 40 + 50e^{-0,2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 40 \wedge 0 \leqslant t \leqslant 10$$

$$\Leftrightarrow 50e^{-0,2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 0 \wedge 0 \leqslant t \leqslant 10$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 0 \wedge 0 \leqslant t \leqslant 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leqslant t \leqslant 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{3} = \frac{1}{2} + k,\ k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leqslant t \leqslant 10$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{2} + 3k,\ k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leqslant t \leqslant 10$$

$$\Leftrightarrow t = 1,5 \vee t = 4,5 \vee t = 7,5$$

O concorrente encontrava-se a 40 metros do solo ao fim de 1,5 s, 4,5 s e 7,5 s.

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(40 + 50e^{-0,2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right) =$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(40 + \frac{50\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)}{e^{0,2t}}\right) = 40 + 0 = 40$$

Com o passar do tempo, a altura tende a estabilizar e o concorrente ficará a 40 m do solo.

4. $h'(t) = \left[40 + 50e^{-0,2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]' =$

$$= 0 + 50\left(-0,2e^{-0,2t}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 50e^{-0,2t}\left(-\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right) =$$

$$= -50e^{-0,2t}\left(0,2\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)$$

5. A função h' é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, em particular é contínua em $[3, 6]$.

$$h'(3) = -50e^{-0,6}\left(0,2\cos(\pi) + \frac{\pi}{3}\sin(\pi)\right) \approx 5,5$$

$$h'(6) = -50e^{-1,2}\left(0,2\cos(2\pi) + \frac{\pi}{3}\sin(2\pi)\right) \approx -3,0$$

Como a função h' é contínua em $[3, 6]$ e $h'(6) < 0 < h'(3)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\, c \in]3, 6[: h'(c) = 0$.
Como a função derivada de h passa de positiva a negativa, no intervalo $]3, 6[$, conclui-se que tem pelo menos um zero nesse intervalo.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

6. $h\,(2{,}8) = 40 + 50\mathrm{e}^{-0{,}2\times 2{,}8}\cos\left(\dfrac{2{,}8\pi}{3}\right) \approx 12$

A menor distância, durante o salto, a que o concorrente esteve do solo, foi de aproximadamente 12 metros.

Pág. 161

Tarefa 13

1.1.1. $-1 \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow -0{,}25 \leqslant 0{,}25\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \leqslant 0{,}25$

$\Leftrightarrow 0{,}25 \geqslant -0{,}25\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \geqslant -0{,}25$

$\Leftrightarrow 2{,}5 + 0{,}25 \geqslant 2{,}5 - 0{,}25\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \geqslant 2{,}5 - 0{,}25$

$\Leftrightarrow 2{,}25 \leqslant V\,(t) \leqslant 2{,}75$

Volume máximo: $2{,}75$ l ; volume mínimo: $2{,}25$ l

1.1.2. $V\,(1) = 2{,}5 - 0{,}25\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2{,}5$ e

$V\,(2) = 2{,}5 - 0{,}25\cos\,(\pi) = 2{,}75$

O volume de ar de reserva nos instantes $t = 1$ e $t = 2$ é igual a $2{,}5$ l e $2{,}75$ l , respetivamente.

1.2. $V'\,(t) = \left(2{,}5 - 0{,}25\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\right)' = -0{,}25 \times \left(-\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\right) =$

$= \dfrac{0{,}25\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

Se $0 < t < 2$ então $V'\,(t) > 0$ e se $2 < t < 4$ então $V'\,(t) < 0$.

O que significa que, durante os primeiros 2 s de um ciclo respiratório, o animal está na fase de inspiração e que nos últimos 2 s está na fase de expiração.

7 minutos e 29 segundos $= 420 + 29$ segundos $=$

$= 449$ segundos e $\dfrac{449}{4} = 112 + \dfrac{1}{4}$

Ao fim de 7 minutos e 29 segundos, o animal encontra-se na fase de inspiração.

1.3. $V'\,(5) = \dfrac{\pi}{8} \approx 0{,}39$ l / s e $V'\,(15) = -\dfrac{\pi}{8} \approx -0{,}39$ l / s

No instante $t = 5$, o volume de ar nos pulmões está a aumentar à razão de $0{,}39$ l por segundo e no instante $t = 15$ está a diminuir à mesma razão.

1.4.1. $V''\,(t) = \left(\dfrac{0{,}25\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\right)' = \dfrac{0{,}25\pi}{2} \times \left(\dfrac{\pi}{2}\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\right) =$

$= \dfrac{0{,}25\pi^2}{4}\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

$V''\,(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{0{,}25\pi^2}{4}\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 1 + 2k\,,\ k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $[4\,,\ 8]$, a função V'' tem dois zeros: 5 e 7 .

t	4		5		7		8
V''	+	+	0	−	0	+	+
V	2,25	$\cup$	2,5	$\cap$	2,5	$\cup$	2,25

As coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico da função V no intervalo $[4\,,\ 8]$ são $(5\,;\ 2{,}5)$ e $(7\,;\ 2{,}5)$.

1.4.2. A experiência decorreu durante 10 minutos, ou seja, durante 600 segundos.

A função V é periódica de período positivo mínimo 4 , logo, no intervalo $[0\,,\ 600]$ existem 150 ciclos respiratórios.

Em cada um deles, como foi provado na alínea anterior, há dois pontos de inflexão.

Conclui-se, então, que o gráfico da função V tem 300 pontos de inflexão.

Pág. 162

2.1. Quando não há movimento, a distância do assento ao solo é dada por $d\,(0)$.

Como $d\,(0) = 50$, conclui-se que a distância do assento ao solo, quando não há movimento, é igual a 50 cm .

$d\,(t) = 50 \wedge 0 < t < 20$

$\Leftrightarrow 25\mathrm{e}^{-0{,}2t}\sin\left(\dfrac{\pi t}{4}\right) + 50 = 50 \wedge 0 < t < 20$

$\Leftrightarrow 25\mathrm{e}^{-0{,}2t}\sin\left(\dfrac{\pi t}{4}\right) = 0 \wedge 0 < t < 20$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi t}{4}\right) = 0 \wedge 0 < t < 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{4} = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \wedge 0 < t < 20$

$\Leftrightarrow t = 4k\,,\ k \in \mathbb{Z} \wedge 0 < t < 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 4 \vee t = 8 \vee t = 12 \vee t = 16$

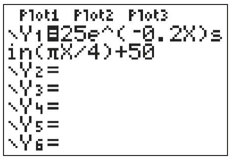
Durante o movimento, excluindo o instante inicial e o final, ocorrem quatro momentos em que a distância do assento ao solo é igual a 50 cm .

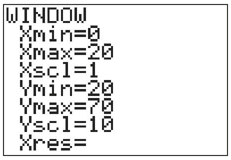
2.2. As abcissas dos pontos A e B são zeros da função derivada da função d . Pela análise do sinal da derivada, conclui-se que a função d tem um mínimo relativo no ponto de abcissa A e um máximo relativo no ponto de abcissa B .

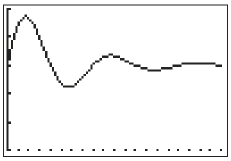
O ponto A corresponde ao primeiro mínimo após o início do movimento e o ponto B ao segundo máximo atingido após o início do movimento.

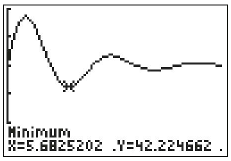
Para determinar os valores pedidos temos de recorrer ao gráfico da função d .

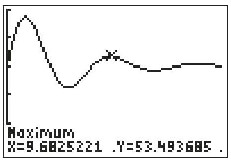
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:











Então, $x_A \approx 5{,}68$ e $x_B \approx 9{,}68$.

Pág. 163

Tarefa 14

1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\,(x)}{g\,(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \dfrac{1}{2}\sin\,(2x)}{2\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\frac{1}{2} \sin (2x)}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sin (2x)}{2x} \times \frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2} \times 4} \right) =$$

$$= 1 - 1 \times 1 \times \frac{2}{2} = 0$$

Nota: Quando $x \longrightarrow 0$, também $\frac{x}{2} \longrightarrow 0$ e $2x \longrightarrow 0$.

1.2. Se a reta tangente ao gráfico de g no ponto P, de abcissa a pertencente ao intervalo $]0\,,\ \pi[$, é paralela à reta $y = 2x$, então, sabe-se que $g'(a) = 2$.

$$g'(x) = \left(2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = 2 \times \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$g'(a) = 2 \wedge a \in \,]0\,,\ \pi[\iff \frac{1}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)} = 2 \ \wedge \ a \in \,]0\,,\ \pi[$$

$$\iff \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \wedge a \in \,]0\,,\ \pi[$$

$$\iff \left(\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge a \in \,]0\,,\ \pi[\iff$$

$$\iff \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z} \wedge a \in \,]0\,,\ \pi[\iff$$

$$\iff a = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \wedge a \in \,]0\,,\pi[\iff a = \frac{\pi}{2}$$

A abcissa do ponto P é $\frac{\pi}{2}$ e a sua ordenada é $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Então, $P\left(\frac{\pi}{2}\,,\ 2\right)$.

1.3. $f'(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin (2x)\right)' = \cos x - \frac{1}{2} \times 2 \cos (2x) =$

$= \cos x - \cos (2x)$

$f''(x) = \left(\cos x - \cos (2x)\right)' = -\sin x - \left(-2 \sin (2x)\right) =$

$= -\sin x + 2 \sin (2x)$

$f''(x) = 0 \iff -\sin x + 2 \sin (2x) = 0$

$\iff -\sin x + 4 \sin x \cos x = 0$

$\iff \sin x\,(-1 + 4 \cos x) = 0 \iff \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{4}$

Se β é a abcissa do ponto A e corresponde ao menor dos zeros positivos da função f'', então sabe-se que

$\cos \beta = \frac{1}{4} \wedge \beta \in \left]0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \iff \sin^2 \beta + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \iff \sin^2 \beta = \frac{15}{16}$

$\iff \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4} \vee \sin \beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

Como $\beta \in \left]0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Então, $f(\beta) = \sin \beta - \frac{1}{2} \sin (2\beta) = \sin \beta - \frac{1}{2} \times 2 \sin \beta \cos \beta =$

$= \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$.

1.4.1. $\overline{BD} = \sin \alpha$ e $\overline{OD} = \cos \alpha$.

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{2 \sin \alpha \times (\cos \alpha + 1)}{2} =$$

$$= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha}{2} = \frac{\sin (2\alpha)}{2} + \sin \alpha$$

$$\sin (2\alpha) + f(\alpha) = \sin (2\alpha) + \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin (2\alpha) =$$

$= \frac{\sin (2\alpha)}{2} + \sin \alpha$ Então, $A_{[ABC]} = \sin (2\alpha) + f(\alpha)$.

1.4.2. Seja A a função que, para cada valor de α, representa a área do triângulo $[ABC]$.

$A'(\alpha) = \left(\frac{\sin (2\alpha)}{2} + \sin \alpha\right)' = \frac{2 \cos (2\alpha)}{2} + \cos \alpha =$

$= \cos (2\alpha) + \cos \alpha$

$A'(\alpha) = 0 \iff \cos (2\alpha) + \cos \alpha = 0 \iff \cos (2\alpha) = -\cos \alpha$

$\iff \cos (2\alpha) = \cos (\pi - \alpha)$

$\iff 2\alpha = \pi - \alpha + 2k\pi \vee 2\alpha = -\pi + \alpha + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee \alpha = -\pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in \left]0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
A'	+	0	−
A	↗	$A\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↘

A área do triângulo $[ABC]$ é máxima quando $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2.1. $f'(x) = \left(n \sin (x) + n \cos (x)\right)' = n \cos (x) - n \sin (x)$

$f''(x) = \left(n \cos (x) - n \sin (x)\right)' = -n \sin (x) - n \cos (x)$

Logo,

$f''(x) - f'(x) = -n \sin (x) - n \cos (x) - \left(n \cos (x) - n \sin (x)\right) =$

$= -2n \cos (x)$.

2.2. A função h é definida por $h(x) = -2n \cos (x)$.

$h(0) = -3 \iff -2n \cos (0) = -3 \iff -2n = -3 \iff n = \frac{3}{2}$

Então, sabe-se que $h(x) = -3 \cos (x)$.

Seja t a reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

A reta t pode ser definida por $y - h\left(\frac{\pi}{2}\right) = h'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$h'(x) = \left(-3 \cos (x)\right)' = 3 \sin (x)$, logo $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

A reta t é definida por $y - 0 = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \iff y = 3x - \frac{3\pi}{2}$.

Pág. 164

Proposta 1

$f(x) = \frac{1}{2} \iff \sin (2x) = \frac{1}{2} \iff \sin (2x) = \sin \frac{\pi}{6}$

$\iff 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$.

Se $k = 1$, então $x = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{17\pi}{12}$.

A opção correta é a **(A)**.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Proposta 2

$\overline{AP} = 2\sin\theta$ e $\overline{OA} = 2\cos\theta$

$A_{\text{sombreada}} = \dfrac{\pi \times 2^2}{2} - 4\cos\theta \times 2\sin\theta = 2\pi - 8\cos\theta\sin\theta$

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 3

Como f é uma função ímpar, sabe-se que $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Sendo f uma função periódica de período positivo mínimo $\dfrac{2\pi}{3}$, tem-se $f\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Então, $f\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right) = -f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = -f\left(\dfrac{3\pi}{12} + \dfrac{8\pi}{12}\right) =$

$= -f\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$. A opção correta é a **(B)**.

Pág. 165

Proposta 4

A opção correta é a **(A)** pois, nesse caso, tem-se que $g\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = g(x)$.

Proposta 5

O período positivo mínimo de f é 4 porque:

$f(x+4) = \sqrt{3} - \operatorname{tg}\left(0{,}25\pi(x+4)\right) = \sqrt{3} - \operatorname{tg}(0{,}25\pi x + \pi) =$

$= \sqrt{3} - \operatorname{tg}(0{,}25\pi x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

A opção correta é a **(B)**.

Proposta 6

1. O contradomínio da função f é o intervalo $[-1, 1]$, logo conclui-se que a função f corresponde ao gráfico **II** e a g corresponde ao **I**.

2. $-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1 \iff 2 - 1 \leqslant 2 + \cos(2x) \leqslant 2 + 1$

$\iff 1 \leqslant g(x) \leqslant 3$.

Então, $D'_g = [1, 3]$.

$g(x) = 3 \iff 2 + \cos(2x) = 3 \iff \cos(2x) = 1$

$\iff 2x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Então $a = -\pi$.

Minimizantes da função f: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

logo conclui-se que $b = -\dfrac{\pi}{2}$.

$g(x) = 2 \iff 2 + \cos(2x) = 2 \iff \cos(2x) = 0$

$\iff 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, então $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Se $k = 1$, então $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Se $k = 2$, então $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

Logo, conclui-se que $c = \dfrac{5\pi}{4}$.

$g(x) = f(x) \iff 2 + \cos(2x) = \sin x$

$\iff 2 + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$

$\iff 2 + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$

$\iff -2\sin^2 x - \sin x + 3 = 0$

$\iff \underbrace{\sin x = -\dfrac{3}{2}}_{\text{eq. impossível}} \lor \sin x = 1 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, então $x = \dfrac{\pi}{2}$. Se $k = 1$, então $x = \dfrac{5\pi}{2}$.

Logo, conclui-se que $d = \dfrac{5\pi}{2}$.

Proposta 7

1. $g(t) = \dfrac{5}{2} + \sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right) = \dfrac{5}{2} + \sin\left(\dfrac{\pi t}{8} + 2\pi\right) =$

$= \dfrac{5}{2} + \sin\left(\dfrac{\pi}{8}(t + 16)\right) = g(t + 16)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Logo, 16 é o período positivo mínimo de g.

2. $g(t) = 2 \iff \dfrac{5}{2} + \sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right) = 2 \iff \sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\iff \sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\iff \dfrac{\pi t}{8} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \lor \dfrac{\pi t}{8} = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff t = -\dfrac{4}{3} + 16k \lor t = \dfrac{28}{3} + 16k,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $t \in [0, 16]$, conclui-se que $t = \dfrac{28}{3} \lor t = \dfrac{44}{3}$.

3. Sabe-se que g é uma função periódica de período positivo mínimo 16 e que a equação $g(t) = 2$ tem duas soluções no intervalo $[0, 16]$.

Então, como $\dfrac{2016}{16} = 126$, conclui-se que a equação $g(t) = 2$ tem 252 soluções (126×2) pertencentes ao intervalo $[0, 2016]$.

Pág. 166

Proposta 8

1. $\overline{AD}^2 = 4^2 + 1^2 \iff \overline{AD}^2 = 17 \iff \overline{AD} = \sqrt{17}$

$\overline{BC}^2 = 5^2 - 4^2 \iff \overline{BC}^2 = 9 \iff \overline{BC} = 3$

$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha =$

$= \dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{\sqrt{17}} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{\sqrt{17}} = \dfrac{16}{5\sqrt{17}} + \dfrac{3}{5\sqrt{17}} = \dfrac{19}{5\sqrt{17}}$

2. $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{19}{16}} = \dfrac{8}{19}$

3. $\sin(\theta + \delta) = \sin\left(\pi - (\beta - \alpha)\right) = \sin(\beta - \alpha) =$

$= \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{\sqrt{17}} - \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{\sqrt{17}} = \dfrac{8}{5\sqrt{17}}$

Proposta 9

1. $d(t) = 12 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$

2.1. A função d é periódica de período positivo mínimo igual a 12 e contradomínio $[10, 14]$.

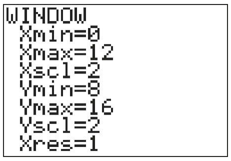
Assim sendo, até se registar a preia-mar decorreram 12 horas e o ponto do casco da embarcação em observação encontra-se a 10 m do fundo.

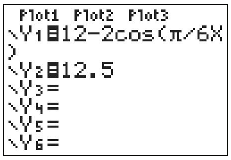
2.2. Prevê-se uma preia-mar de 12 em 12 horas porque 12 é o período positivo mínimo da função d.

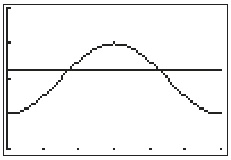
NEMA12CPR2 © Porto Editora

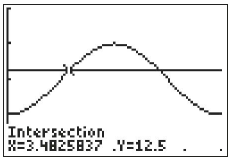
2.3. $d(t) \geqslant 12{,}5 \Leftrightarrow t \in [t_1\,,\ t_2]$.

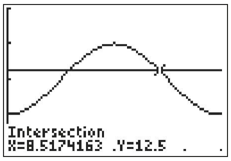
Para encontrar os valores pedidos pode recorrer-se à calculadora gráfica, com a seguinte sequência de procedimentos:











Conclui-se, então, que $t_1 \approx 3{,}48$ e $t_2 \approx 8{,}52$.

Pág. 167

Proposta 10

1. $D_f = \mathbb{R}$

2. O período positivo mínimo da função é $\frac{2\pi}{3}$.

3. $f(x) = 18 \Leftrightarrow 16 - 4\cos(3x) = 18 \Leftrightarrow \cos(3x) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \lor 3x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \lor x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\,,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $-1 \leqslant \cos(3x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 4 \geqslant -4\cos(2x) \geqslant -4$

$20 \geqslant 16 - 4\cos(2x) \geqslant 12 \Leftrightarrow 12 \leqslant f(x) \leqslant 16$

Então, $D'_f = [12\,,\ 16]$. $f(x) = 12 \land x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow 16 - 4\cos(3x) = 12 \land x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow \cos(3x) = 1 \land x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \land x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3}\,,\ k \in \mathbb{Z} \land x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow x \in \left\{0\,,\ \frac{2\pi}{3}\,,\ \frac{4\pi}{3}\,,\ 2\pi\right\}$

5. Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{9}$. A reta t pode ser definida por:

$y - f\left(\frac{5\pi}{9}\right) = f'\left(\frac{5\pi}{9}\right)\left(x - \frac{5\pi}{9}\right)$.

$f\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 16 - 4\cos\left(3 \times \frac{5\pi}{9}\right) = 16 - 4\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$= 16 - 4\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 16 - 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16 - 4 \times \frac{1}{2} = 14$

$f'(x) = \left(16 - 4\cos(3x)\right)' = 12\sin(3x)$, logo:

$f'\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 12\sin\left(3 \times \frac{5\pi}{9}\right) = 12\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -12\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= -12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$.

A reta t é definida por:

$y - 14 = -6\sqrt{3}\left(x - \frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow y = -6\sqrt{3}x + \frac{10\sqrt{3}}{3}\pi + 14$.

Proposta 11

1.1. $\cos\theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OV}} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\overline{OV}} \Leftrightarrow \overline{OV} = \frac{1}{\cos\theta}$

$P_{\text{semicircunferência}} = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi$

Logo, $P(\theta) = \pi + 2 \times \frac{1}{\cos\theta} = \pi + \frac{2}{\cos\theta}$.

1.2. $\operatorname{tg}\theta = \frac{\overline{AV}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\overline{AV}}{1} \Leftrightarrow \overline{AV} = \operatorname{tg}\theta$

$A_{\text{semicírculo}} = \frac{\pi \times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

Logo, $A(\theta) = \frac{\pi}{2} + \frac{2 \times \operatorname{tg}\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}\theta$.

2. $P(\theta) = \pi + 3 \Leftrightarrow \pi + \frac{2}{\cos\theta} = \pi + 3 \Leftrightarrow \frac{2}{\cos\theta} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \cos\theta$

$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\theta = \frac{9}{4}$

$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \lor \operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Como $\theta \in \left]0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Então, $A(\theta) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\pi + \sqrt{5}}{2}$.

3.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.2. Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$.

A reta t pode ser definida por $y - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi + \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \pi + \frac{2}{\frac{1}{2}} = \pi + 4$

$f'(x) = \left(\pi + \frac{2}{\cos x}\right)' = \frac{0 - 2(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$, logo

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4\sqrt{3}$.

A reta t é definida por:

$y - (\pi + 4) = 4\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow y = 4\sqrt{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi + \pi + 4$.

Proposta 12

$g'(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{0 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x \cos^2 x} =$

$= \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

A opção correta é a **(D)**.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 168

Proposta 13

O ponto P parte de A e à medida que descreve o 1.º quarto de circunferência, a distância de Q a M vai diminuindo até ser igual a zero $\left(\text{quando } x = \frac{\pi}{2}\right)$.

À medida que P descreve o 2.º quarto de circunferência, a distância de Q a M vai aumentando.
Na outra metade do percurso a função tem o mesmo comportamento que o descrito anteriormente.

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 14

1. $f(x) = \text{tg}\left(\frac{\pi x}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi x}{3} + \pi\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}(x+3)\right) = f(x+3)$,

$\forall\, x \in D_f$

Logo, 3 é o período positivo mínimo da função f porque $f(x+3) = f(x)$, $\forall\, x \in D_f$.

2. O ponto A tem abcissa 1 e pertence ao gráfico de f, logo $A(1\,,\ f(1))$.

Como $f(1) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, então $A(1\,,\ \sqrt{3})$.

O ponto B tem a mesma ordenada do ponto A e pertence à reta s.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{\pi x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{3}{2} + 3k\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

As assintotas verticais do gráfico de f são as retas de equações $x = \frac{3}{2} + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

A reta r é definida por $x = \frac{3}{2}$ e a s por $x = \frac{9}{2}$.

Então, conclui-se que $B\left(\frac{9}{2}\,,\ \sqrt{3}\right)$.

3. A reta t é tangente ao gráfico da função f no ponto A de abcissa 1.

A reta t pode ser definida por $y - \sqrt{3} = f'(1)(x-1)$.

$f'(x) = \left(\text{tg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right)' = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)} = \dfrac{\pi}{3\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)}$, logo

$f'(1) = \dfrac{\pi}{3\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\pi}{3\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4\pi}{3}$.

A reta t é definida por:

$y - \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3}(x-1) \iff y = \frac{4\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$.

Pág. 169

Proposta 15

1.1. Sendo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, as coordenadas do ponto P são $\left(\cos\frac{\pi}{4}\,,\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$, ou seja, $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Como R pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada do ponto P, então $R\left(0\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Como o triângulo $[RPQ]$ é equilátero, conclui-se que o ponto Q tem abcissa $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

A altura do triângulo $[RPQ]$ é dada por $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$, ou seja, é igual a $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Logo, a ordenada do ponto Q é $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Então, $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\,,\ \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$.

1.2. $A_{[RPQ]} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{12}}{8}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{16} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

2. $A(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4}$

Nota: A altura de um triângulo equilátero de lado a é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

3.1. $A(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{16} \iff \frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16} \iff \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$

$\iff \cos\alpha = \frac{1}{2} \vee \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

Como $\alpha \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3.2. O perímetro do triângulo $[RPQ]$ é dado, em função de α, por $P(\alpha) = 3\cos\alpha$.

$P(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \iff 3\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2} \iff \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

4. $A'(\alpha) = \left(\dfrac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4}\right)' = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 2\cos\alpha\,(-\sin\alpha) =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\alpha)$

5. $8y + \sqrt{3}x = 0 \iff y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x$ As retas tangentes ao gráfico de A que são paralelas à reta dada têm declive $-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

$A'(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \iff -\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{8} \iff \sin(2\alpha) = \frac{1}{2}$

$\iff 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\alpha = \frac{\pi}{12} \vee \alpha = \frac{5\pi}{12}$.

Proposta 16

$f'(x) = \left(\sin^2(3x)\right)' = 2\sin(3x)\,3\cos(3x) = 3\sin(6x)$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(\frac{\pi}{24} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{24}\right)}{h} = f'\left(\frac{\pi}{24}\right) = 3\sin\left(6 \times \frac{\pi}{24}\right) =$

$= 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ A opção correta é a **(D)**.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Proposta 17

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=1$$

Mudança de variável: Fazendo $\frac{1}{x}=y$, vem $x=\frac{1}{y}$.

Se $x\longrightarrow+\infty$, então $y\longrightarrow0^+$. A opção correta é a **(B)**.

Pág. 170

Proposta 18

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{3x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{3(1+\cos x)}\right)=1\times1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

A opção correta é a **(A)**.

Proposta 19

1. $$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(2x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\left(1-\frac{\sin(2x)}{2x}\times2\right)=$$

$$=1-1\times2=-1$$

Nota: Quando $x\longrightarrow0$, também $2x\longrightarrow0$.

A opção correta é a **(C)**.

2. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\sin(\pi)=\frac{\pi}{2}$$ A opção correta é a **(B)**.

Proposta 20

1. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{5x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\times\frac{2}{5}\right)=1\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

Nota: Quando $x\longrightarrow0$, também $2x\longrightarrow0$.

2. $$\lim_{x\to0}\frac{2x-\operatorname{tg}(x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\left(2-\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x}\right)=2-\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x\cos(x)}=$$

$$=2-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{1}{\cos(x)}\right)=2-1\times1=1$$

3. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x)+\sin^2(x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(x)}{x^2}=2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{\sin(x)}{x}\right)=2\times1\times1=2$$

4. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos(3x)+\cos x\sin(3x)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin(x+3x)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(4x)}{4x}\times2\right)=1\times2=2$$

5. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)=1\times1\times4=4$$

Nota: Quando $x\longrightarrow0$, também $2x\longrightarrow0$ e $\frac{x}{2}\longrightarrow0$.

6. $$\lim_{x\to3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-9}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y(y+3+3)}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left(\frac{\sin y}{y}\times\frac{1}{y+6}\right)=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

Mudança de variável: Fazendo $x-3=y$, vem $x=y+3$.

Se $x\longrightarrow3$, então $y\longrightarrow0$.

7. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{6x-\pi}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{6y}=\lim_{y\to0}\left(\frac{\sin y}{y}\times\frac{1}{6}\right)=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

Mudança de variável: Fazendo $x-\frac{\pi}{6}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{6}$.

Se $x\longrightarrow\frac{\pi}{6}$, então $y\longrightarrow0$.

8. $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\overset{\infty\times0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=1$$

Mudança de variável: Fazendo $\frac{1}{x}=y$, vem $x=\frac{1}{y}$.

Se $x\longrightarrow+\infty$, então $y\longrightarrow0^+$.

9. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}2\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\sin x}{x}}=2\,\frac{\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}{\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=2\times\frac{1}{1}=2$$

Nota: Quando $x\longrightarrow0$, também $2x\longrightarrow0$.

10. $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\sin(2x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{2\times\frac{\sin(2x)}{2x}}=\frac{1}{2}\times\frac{\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)}{\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$ *Nota*: Quando $x\longrightarrow0$, também $2x\longrightarrow0$.

11. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

12. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sqrt{1-\cos x}\right)\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-(1-\cos x)}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos x}}=\frac{1}{2}$$

Pág. 171

Proposta 21

1. $$f'(\pi)=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{3\sin\left(\frac{x}{2}\right)-3}{x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{3\sin\left(\frac{y+\pi}{2}\right)-3}{y}=3\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-1}{y}=$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$= -3\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{y} = -3\lim_{y\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\left(1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{y\left(1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)} =$$

$$= -3\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y\left(1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)} =$$

$$= -3\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = -3\times 1\times\frac{1}{2}\times 0 = 0$$

Mudança de variável: Fazendo $x-\pi=y$, vem $x=y+\pi$.
Se $x\longrightarrow\pi$, então $y\longrightarrow 0$.

2. $g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(2x)-0}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin(2x)}{2x}\times 2\right)=1+1\times 2=3$

Nota: Quando $x\longrightarrow 0$, também $2x\longrightarrow 0$.

3. $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x-0}{x-\frac{\pi}{2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim_{y\to 0}\frac{\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\left(y+\frac{\pi}{2}\right)(-\sin y)}{y}=$

$=\lim_{y\to 0}\left[\left(-y-\frac{\pi}{2}\right)\times\frac{\sin y}{y}\right]=-\frac{\pi}{2}\times 1=-\frac{\pi}{2}$

Proposta 22

1.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow \sin x+\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x(1+\cos x)=0$
$\Leftrightarrow \sin x=0 \vee \cos x=-1 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x=k\pi \vee x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

1.2. $f(-x)=\sin(-x)+\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x+(-\sin x)\cos x=$
$=-(\sin x+\sin x\cos x)=-f(x)$
f é uma função ímpar porque $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in D_f$.

1.3. $\operatorname{tg}(15\pi+b)=\frac{3}{4}\wedge b\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(b)=\frac{3}{4}\wedge b\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

Como $\operatorname{tg}(b)>0\wedge b\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$,

conclui-se que $b\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$.

$1+\operatorname{tg}^2 b=\frac{1}{\cos^2 b} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 b} \Leftrightarrow \frac{25}{16}=\frac{1}{\cos^2 b}$

$\Leftrightarrow \cos^2 b=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos b=\sqrt{\frac{16}{25}} \vee \cos b=-\sqrt{\frac{16}{25}}$

$\Leftrightarrow \cos b=\frac{4}{5}\vee\cos b=-\frac{4}{5}$

Como $b\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\cos b=-\frac{4}{5}$.

$\operatorname{tg} b=\frac{\sin b}{\cos b} \Leftrightarrow \sin b=\operatorname{tg} b\times\cos b \Leftrightarrow \sin b=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{5}\right)$

$\Leftrightarrow \sin b=-\frac{3}{5}$

Então, $f(b)=\sin b+\sin b\cos b=-\frac{3}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=$
$=-\frac{3}{5}+\frac{12}{25}=-\frac{3}{25}$.

2.1. O ponto B tem coordenadas $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.
A amplitude, em radianos, do ângulo OBC é igual a α.
Logo, $\overline{BC}=2\cos\alpha$.

$A_{[ABCD]}=\frac{2+2\cos\alpha}{2}\times\sin\alpha=(1+\cos\alpha)\times\sin\alpha$
$=\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=f(\alpha)$

2.2. $f'(\alpha)=(\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)'=$
$=\cos\alpha+\cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha(-\sin\alpha)=$
$=\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos\alpha+\cos(2\alpha)$

$f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos\alpha+\cos(2\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha)=-\cos\alpha$
$\Leftrightarrow \cos(2\alpha)=\cos(\pi-\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\alpha=\pi-\alpha+2k\pi \vee 2\alpha=-\pi+\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\vee\alpha=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
A'	+	0	−
A	↗	$A\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↘

A área do trapézio é máxima quando $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Proposta 23

1. $f'(x)=(\sin^2 x\cos x)'=2\sin x\cos x\cos x+\sin^2 x(-\sin x)=$
$=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$

2. $f'(x)=\left(\frac{\cos(x^2)}{1+\cos x}\right)'=\frac{-2x\sin(x^2)(1+\cos x)-(-\sin x)\cos(x^2)}{(1+\cos x)^2}=$
$=\frac{-2x\sin(x^2)(1+\cos x)+\sin x\cos(x^2)}{(1+\cos x)^2}$

3. $f'(x)=\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)'=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\left(-\frac{2}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)=$
$=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{x^2}\sin\left(\frac{2}{x}\right)$

4. $f'(x)=(\sin^2 x-\sin(x^2))'=2\sin x\cos x-2x\cos(x^2)=$
$=\sin(2x)-2x\cos(x^2)$

5. $f'(x)=(\cos x\,e^{\sin x})'=-\sin x\,e^{\sin x}+\cos x\cos x\,e^{\sin x}=$
$=e^{\sin x}(-\sin x+\cos^2 x)$

6. $f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)'=$
$=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$
$=\frac{\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=$
$=\frac{1}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}=\frac{1}{1+\sin(2x)}$

Pág. 172

Proposta 24

1. $f(\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)=$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$= \frac{\text{tg}\,\alpha + \sin\alpha - \text{tg}\,\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg}\,\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\text{tg}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha\,(1-\cos^2\alpha)}{2\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\,(\sin^2\alpha)}{2\cos\alpha} = \frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$$

2. A função f é contínua em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, em particular é contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^3}{2\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3}{2\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{2\times\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Como a função f é contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2} < f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists\,\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[: f(\alpha) = \frac{1}{2}$. Assim, existe um valor $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$ para o qual a área do trapézio é $\frac{1}{2}$.

3. $f'(\alpha) = \left(\frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}\right)' =$

$$= \frac{3\sin^2\alpha\cos\alpha\times 2\cos\alpha - \sin^3\alpha\,(-2\sin\alpha)}{(2\cos\alpha)^2} =$$

$$= \frac{2\sin^2\alpha\,(3\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha)}{(2\cos\alpha)^2} =$$

$= \frac{2\sin^2\alpha\,(3\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{(2\cos\alpha)^2}$. Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\alpha) > 0$. Logo, a função f é estritamente crescente.

Proposta 25

1.1.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{\sin(2x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{\sin(2x)}{2x}\times 2\right) =$

$= 1 + 1\times 2 = 3$ *Nota*: Quando $x \longrightarrow 0$, também $2x \longrightarrow 0$.

A ordenada do ponto A é igual a 3.

1.1.2. $f(0) = 1 \iff \frac{k\cos 0}{2+\cos 0} = 1 \iff \frac{k}{3} = 1 \iff k = 3$

Para saber qual é a abcissa do ponto B, temos de determinar a expressão geral dos zeros da função quando $k \geqslant 0$.

$f(x) = 0 \iff \frac{3\cos x}{2+\cos x} = 0 \iff 3\cos x = 0 \wedge \cos x \neq -2$

$\iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

A abcissa do ponto B é igual a $\frac{3\pi}{2}$.

2. O único ponto onde a função poderá não ser contínua é o ponto de abcissa 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{k\cos x}{2+\cos x} = \frac{k}{3}$, $f(0) = \frac{k}{3}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$.

f é contínua em $x = 0$ se $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Então, tem-se $\frac{k}{3} = 3 \iff k = 9$.

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{\sin(2x)}{x}\right) = 1 + 0 = 1$

Sabe-se que $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Quando x tende para $-\infty$, tem-se $\frac{-1}{x} \geqslant \frac{\sin(2x)}{x} \geqslant \frac{1}{x}$.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0$, necessariamente $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sin(2x)}{x} = 0$. Então, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de qualquer função da família.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 173

Proposta 26

1. Os pontos B e C correspondem a extremos relativos da função.

$f'(x) = (x - 2\cos x)' = 1 - 2(-\sin x) = 1 + 2\sin x$

$f'(x) = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \iff 1 + 2\sin x = 0 \wedge x \in [0, 2\pi]$

$\iff \sin x = -\frac{1}{2} \wedge x \in [0, 2\pi] \iff x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}$

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
f'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
f	-2	↗	$\frac{7\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{11\pi}{6}-\sqrt{3}$	↗	$2\pi - 2$

Conclui-se então que

$B\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ e $C\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}-\sqrt{3}\right)$.

2. A função f é contínua em $[0, \pi]$.

$f(0) = -2$ e $f(\pi) = \pi + 2 \approx 5{,}14$

Como f é contínua em $[0, \pi]$ e $f(0) < 4 < f(\pi)$, pelo Teorema de Bolzano conclui-se que a equação $f(x) = 4$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

Logo, também podemos afirmar que tem, pelo menos, uma solução em $[0, \pi]$.

Sendo a função estritamente crescente no intervalo $[0, \pi]$, então a solução da equação é única.

3. $f''(x) = (1 + 2\sin x)' = 2\cos x$

$f''(x) = 0 \wedge x \in [0, \pi] \iff 2\cos x = 0 \wedge x \in [0, \pi]$

$\iff \cos x = 0 \wedge x \in [0, \pi] \iff x = \frac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f''	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	-2	∪	$\frac{\pi}{2}$	∩	$\pi + 2$

As coordenadas do ponto de inflexão são $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Proposta 27

1. A área da região colorida da figura representada é dada por $A(\pi) - A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$$A(\pi) - A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \ln\left(1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \ln 2 - \ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(2 : \frac{5}{4}\right) = \ln\left(\frac{8}{5}\right)$$

2. $f(x) = A'(x) = \left[\ln\left(1+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]' = \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\sin(x)}{1+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{0{,}5\sin(x)}{1+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Pág. 174

Proposta 28

$g'(x) = (\pi x + \operatorname{tg} x)' = \pi + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$g''(x) = \left(\pi + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)' = 0 + \dfrac{0 - 1\times 2\cos x\,(-\sin x)}{\cos^4 x} =$

$= \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{\sin(2x)}{\cos^4 x}$

Proposta 29

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(1+\sin x) = \ln(1+\sin x)$

$(f\circ g)'(x) = (\ln(1+\sin x))' = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$(f\circ g)''(x) = \left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x\,(1+\sin x) - \cos x\cos x}{(1+\sin x)^2} =$

$= \dfrac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} =$

$= \dfrac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{-(\sin x + 1)}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{-1}{1+\sin x},\ \forall x \in D_{f\circ g}$

Proposta 30

1. $f'(x) = (\cos^2(2x))' = 2\cos(2x)\,(-2\sin(2x)) =$

$= -2\times 2\sin(2x)\cos(2x) = -2\sin(4x)$

$f''(x) = (-2\sin(4x))' = -2\times 4\cos(4x) = -8\cos(4x)$

2. $f''(x) = 0 \land x\in[0,\pi] \Leftrightarrow -8\cos(4x) = 0 \land x\in[0,\pi]$

$\Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \land x\in[0,\pi]$

$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \land x\in[0,\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z} \land x\in[0,\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \lor x = \frac{3\pi}{8} \lor x = \frac{5\pi}{8} \lor x = \frac{7\pi}{8}$

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
f''	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
f	1	$\frown$	$\frac{1}{2}$	$\smile$	$\frac{1}{2}$	$\frown$	$\frac{1}{2}$	$\smile$	$\frac{1}{2}$	$\frown$	1

Os pontos de inflexão do gráfico que pertencem a $[0,\pi]$ são: $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{8}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{7\pi}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Se as retas tangentes ao gráfico nesses pontos são perpendiculares ao eixo das ordenadas então o seu declive é nulo.

$g'(x) = \left(\cos x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right)' = -\sin x - \frac{1}{2}\times 2\cos(2x) =$

$= -\sin x - \cos(2x)$

$g'(x) = 0 \land x\in[0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow -\sin x - \cos(2x) = 0 \land x\in[0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\sin x \land x\in[0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \land x\in[0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(2x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \lor 2x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

$\land\ x\in[0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \lor x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right) \land x\in[0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \lor x = \frac{7\pi}{6} \lor x = \frac{11\pi}{6}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin(\pi) = 0$

$g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$g\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

As coordenadas dos pontos pedidos são:

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ e $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

Proposta 31

1. $f'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{2-\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x\,(2-\cos x) - \sin x\sin x}{(2-\cos x)^2} =$

$= \dfrac{2\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(2-\cos x)^2} = \dfrac{-1+2\cos x}{(2-\cos x)^2}$

2. $f'(x) = 0 \land x\in\,]0,\pi[\ \Leftrightarrow \dfrac{-1+2\cos x}{(2-\cos x)^2} = 0 \land x\in\,]0,\pi[$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \land x\in\,]0,\pi[\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$

A função f é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ e decrescente em $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$.

Tem máximo absoluto igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ para $x = \frac{\pi}{3}$.

3. $f''(x) = \left(\dfrac{-1+2\cos x}{(2-\cos x)^2}\right)' =$

$= \dfrac{-2\sin x\,(2-\cos x)^2 - (-1+2\cos x)\times 2\,(2-\cos x)\sin x}{(2-\cos x)^4} =$

$= \dfrac{-2\sin x\,(2-\cos x)\left[(2-\cos x) + (-1+2\cos x)\right]}{(2-\cos x)^4} =$

$= \dfrac{-2\sin x\,(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$

4. O gráfico da função f não tem pontos de inflexão porque a função f'' é sempre negativa em $]0,\pi[$.

Pág. 175

Proposta 32

1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 + \sin(2x) = 1 - \cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x + 1) = 0$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$ tem-se $x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{7\pi}{6} \vee x = \dfrac{11\pi}{6}$.

Se $k = 1$ tem-se $x = \dfrac{3\pi}{2} \vee x = \dfrac{19\pi}{6} \vee x = \dfrac{23\pi}{6}$.

O ponto P tem abcissa $\dfrac{\pi}{2}$ e o ponto Q tem abcissa $\dfrac{7\pi}{6}$.

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin(\pi) = 1$ e

$f\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = 1 + \sin\left(\dfrac{7\pi}{3}\right) = 1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Então, $P\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\ 1\right)$ e $Q\left(\dfrac{7\pi}{6}\,,\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $f'(x) = \left(1 + \sin(2x)\right)' = 2\cos(2x)$

$f''(x) = \left(2\cos(2x)\right)' = -4\sin(2x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}$

x	...	0		$\frac{\pi}{2}$		π	...
f''		0	$-$	0	$+$	0	
f		1	$\frown$	1	$\smile$	1	

O ponto P é um ponto de inflexão do gráfico da função f.

$g'(x) = (1 - \cos x)' = \sin x$ e $g''(x) = (\sin x)' = \cos x$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

x	...	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	...
g''		0	$+$	0	$-$	0	
g		1	$\smile$	1	$\frown$	1	

O ponto P também é um ponto de inflexão do gráfico da função g.

3. A região colorida, incluindo a fronteira, é definida pela seguinte condição:

$y \geqslant 1 + \sin(2x) \wedge y \leqslant 1 - \cos x \wedge \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{7\pi}{6}$

4. Se as retas tangentes ao gráfico de f nesses pontos são paralelas à bissetriz dos quadrantes pares, então o seu declive é igual a -1.

$f'(x) = -1 \wedge x \in [0\,,\ \pi] \Leftrightarrow 2\cos(2x) = -1 \wedge x \in [0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\dfrac{1}{2} \wedge x \in [0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow \left(2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow \left(x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \vee x = \dfrac{2\pi}{3}$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1 + \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

Assim, os pontos pedidos têm de coordenadas

$\left(\dfrac{\pi}{3}\,,\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ e $Q\left(\dfrac{2\pi}{3}\,,\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Proposta 33

1. $f'(x) = \left(2\sin x - \dfrac{1}{2}\sin(2x)\right)' = 2\cos x - \dfrac{1}{2} \times 2\cos(2x) =$

$= 2\cos x - \cos(2x)$

$f''(x) = \left(2\cos x - \cos(2x)\right)' = -2\sin x + 2\sin(2x)$

$f''(x) = 0 \wedge x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow -2\sin x + 2\sin(2x) = 0 \wedge x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin x \wedge x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow (2x = x + 2k\pi \vee 2x = \pi - x + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}) \wedge$

$\wedge\, x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(x = 2k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}\,,\ k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in [0\,,\ 2\pi]$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{\pi}{3} \vee x = \pi \vee x = \dfrac{5\pi}{3} \vee x = 2\pi$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f''	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	0	$\smile$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frown$	0	$\smile$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frown$	0

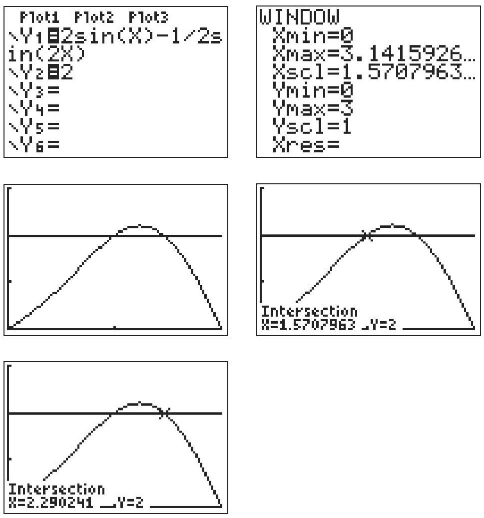
As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de f são $\dfrac{\pi}{3}$, π e $\dfrac{5\pi}{3}$.

2.1. $A_{[ABC]} = \dfrac{2\sin\theta\,(2 - \cos\theta)}{2} = 2\sin\theta - \sin\theta\cos\theta =$

$= 2\sin\theta - \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) = f(\theta)$

2.2. Pretende-se determinar graficamente as soluções da equação $f(\theta) = 2$, em que $\theta \in \left]0\,,\ \pi\right[$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, procede-se da seguinte forma:



Conclui-se, então, que

$\theta \approx 1{,}6$ rad $\vee\ \theta \approx 2{,}3$ rad.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

PARA AVALIAR 1

Parte 1 – Questões de escolha múltipla

Pág. 176

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{e^{kx}-1}=-2 \iff \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{e^{kx}-1}{kx}}\times\dfrac{3}{k}\right)=-2$

$\iff \dfrac{1}{1}\times\dfrac{3}{k}=-2 \iff \dfrac{3}{k}=-2 \iff k=-\dfrac{3}{2}$

A opção correta é a **(B)**.

2. $f'(x)=\left(\dfrac{x}{3}-\sin x\right)'=\dfrac{1}{3}-\cos x$

α é um zero da função f' ; então, sabe-se que

$\dfrac{1}{3}-\cos\alpha=0 \iff \cos\alpha=\dfrac{1}{3}$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \iff \sin^2\alpha+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=1$

$\iff \sin^2\alpha=\dfrac{8}{9} \underset{\sin\alpha>0}{\iff} \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ A opção correta é a **(A)**.

3. A ordenada do ponto P é dada por $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

A opção correta é a **(D)**.

4. A opção correta é a **(B)**.

Sendo $f(x)=x+\sin^2 x$, então:

$f'(x)=(x+\sin^2 x)'=1+2\sin x\cos x=1+\sin(2x)$

$f''(x)=\left(1+\sin(2x)\right)'=2\cos(2x)$.

5. O único ponto onde a função f poderá ser descontínua é o ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{3}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\left(\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)+k\right)=0+k=k$ e $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=k$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3x-\pi}=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\sin y}{3y}=$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\sin y}{y}=\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{3}$

Mudança de variável: Fazendo $x-\dfrac{\pi}{3}=y$, vem $x=y+\dfrac{\pi}{3}$.

Se $x\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}^+$, então $y\longrightarrow 0^+$.

f é contínua em $x=\dfrac{\pi}{3}$ se $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Então, tem-se $k=\dfrac{1}{3}$. A opção correta é a **(A)**.

Parte 2 – Questões de desenvolvimento

Pág. 177

1.1. $-1\leqslant\sin(4\pi t)\leqslant 1$

$\iff -8\leqslant 8\sin(4\pi t)\leqslant 8 \iff 0\leqslant\left|8\sin(4\pi t)\right|\leqslant 8$

$\iff 0\leqslant d(t)\leqslant 8$

Então, $D'=[0\,,\,8]$.

A maior distância a que o pêndulo se encontra do centro é de 8 cm .

1.2. Quando o pêndulo passa no centro sabe-se que $d(t)=0$.

$d(t)=0 \iff \left|8\sin(4\pi t)\right|=0 \iff 8\sin(4\pi t)=0$

$\iff \sin(4\pi t)=0 \iff 4\pi t=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff t=\dfrac{k}{4}\,,\ k\in\mathbb{Z}$

Após o início do movimento, decorreram $0{,}25$ s até o pêndulo passar no centro pela primeira vez.

2.1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{-y}$

$=\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{-\sin y}{-y}=\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\sin y}{y}=1$

Mudança de variável: Fazendo $x-\dfrac{\pi}{2}=y$, vem $x=y+\dfrac{\pi}{2}$.

Se $x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}^-$, então $y\longrightarrow 0^-$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(e^{\sin(x)+k}\right)=e^{1+k}$ e $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{1+k}$

f é contínua em $x=\dfrac{\pi}{2}$ se $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Então, tem-se $e^{1+k}=1 \iff 1+k=0 \iff k=-1$.

2.2. $f'(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\sin(y+\pi)}-1}{y}=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{-\sin y}-1}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{e^{-\sin y}-1}{-\sin y}\times\dfrac{-\sin y}{y}\right)=1\times(-1)=-1$

Mudança de variável:

Nota: Quando $y\longrightarrow 0$, também $-\sin y\longrightarrow 0$.

Fazendo $x-\pi=y$, vem $x=y+\pi$.

Se $x\longrightarrow\pi$, então $y\longrightarrow 0$.

3.1. $f(x)=0 \iff 2\sin(2x)=0 \iff \sin(2x)=0$

$\iff 2x=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff x=\dfrac{k\pi}{2}\,,\ k\in\mathbb{Z}$

A abcissa do ponto R é o menor dos zeros positivos da função f , logo $R\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\,0\right)$.

$-1\leqslant\sin(2x)\leqslant 1 \iff -2\leqslant 2\sin(2x)\leqslant 2 \iff -2\leqslant f(x)\leqslant 2$

O máximo da função f é 2 .

$f(x)=0 \iff 2\sin(2x)=2 \iff \sin(2x)=1$

$2x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

Então, a abcissa do ponto M é $\dfrac{\pi}{4}$. Assim, $M\left(\dfrac{\pi}{4}\,,\,2\right)$.

3.2. Sendo $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$, então a ordenada do ponto P é $y_P=f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=$

$=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\times\dfrac{1}{2}=1$.

A altura do triângulo $[PQM]$ é dada por y_M-y_P , ou seja, é igual a 1 .

A abcissa do ponto Q é $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{12}$.

$A_{[PQNM]}=\dfrac{\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\times 1}{2}=\dfrac{\frac{4\pi}{12}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

3.3. Os pontos P e Q podem ser escritos em função de α da seguinte forma:

$P\left(\alpha\,,\ 2\sin(2\alpha)\right)$ e $Q\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\,,\ 2\sin(2\alpha)\right)$.

A área do triângulo $[PQM]$ é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\times\left(2-2\sin(2\alpha)\right)}{2}=\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\times\left(1-\sin(2\alpha)\right)$$

A expressão que representa o valor da área do triângulo $[PQM]$ é a **II**.

3.4. $f'(x)=\left(2\sin(2x)\right)'=2\left(2\cos(2x)\right)=4\cos(2x)$

$f''(x)=\left(4\cos(2x)\right)'=4\left(-2\sin(2x)\right)=-8\sin(2x)$

$4f(x)+f'(x)+f''(x)=2\wedge x\in[0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow 8\sin(2x)+4\cos(2x)-8\sin(2x)=2\wedge x\in[0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow 4\cos(2x)=2\wedge x\in[0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=\frac{1}{2}\wedge x\in[0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow \left(2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee 2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right)\wedge x\in[0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{6}+k\pi\vee x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right)\wedge x\in[0\,,\ \pi]$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{6}$

Pág. 180

46.1. $x^2+9=0\Leftrightarrow x^2=-9\Leftrightarrow x=\sqrt{-9}\vee x=-\sqrt{-9}$

$\Leftrightarrow x=3\mathrm{i}\vee x=-3\mathrm{i}$

46.2. $x^3=-8x\Leftrightarrow x^3+8x=0\Leftrightarrow x(x^2+8)=0$

$\Leftrightarrow x=0\vee x^2=-8\Leftrightarrow x=0\vee x=\sqrt{-8}\vee x=-\sqrt{-8}$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=2\sqrt{2}\mathrm{i}\vee x=-2\sqrt{2}\mathrm{i}$

46.3. $x^2-2x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2\pm 2\mathrm{i}}{2}$

$\Leftrightarrow x=1+\mathrm{i}\vee x=1-\mathrm{i}$

46.4. $x^2-6x=-11\Leftrightarrow x^2-6x+11=0\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{-8}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm 2\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}\Leftrightarrow x=3+\sqrt{2}\mathrm{i}\vee x=3-\sqrt{2}\mathrm{i}$

Pág. 181

47.

z	Re (z)	Im (z)
$3+5\mathrm{i}$	3	5
$-3\mathrm{i}$	0	-3
7	7	0
$-2+\mathrm{i}$	-2	1
$8\mathrm{i}$	0	8
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
$-\sqrt{3}-\mathrm{i}$	$-\sqrt{3}$	-1

48.1. $\mathrm{Re}(z)=3\wedge\mathrm{Im}(z)=-1\Leftrightarrow x-2=3\wedge y+1=-1$

$\Leftrightarrow x=5\wedge y=-2$

48.2. $\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow y+1=0\Leftrightarrow y=-1$

z é um número real se $x\in\mathbb{R}\wedge y=-1$.

48.3. z é um número imaginário puro se

$\mathrm{Re}(z)=0\wedge\mathrm{Im}(z)\neq 0\Leftrightarrow x-2=0\wedge y+1\neq 0$

$\Leftrightarrow x=2\wedge y\neq -1$

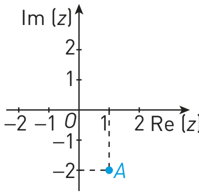
49. z representa um número real negativo se

$\mathrm{Re}(z)<0\wedge\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow k+1<0\wedge k^2-4=0$

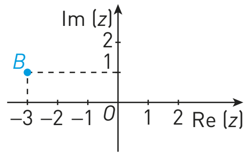
$\Leftrightarrow k<-1\wedge(k=2\vee k=-2)\Leftrightarrow k=-2$

Pág. 182

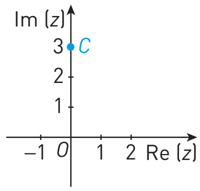
50.1. Sendo $z=1-2\mathrm{i}$, então $|z|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.



50.2. Sendo $z=-3+\mathrm{i}$, então $|z|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$.

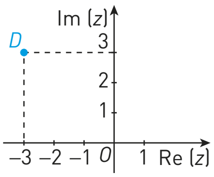


50.3. Sendo $z=3\mathrm{i}$, então $|z|=\sqrt{0^2+3^2}=3$.

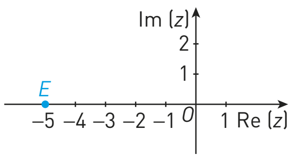


50.4. Sendo $z=-3-3\mathrm{i}$, então $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$.

$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.



50.5. Sendo $z=-5$, então $|z|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$.



Pág. 183

51.1. $z_A=3+2\mathrm{i}$, $z_B=1+3\mathrm{i}$, $z_C=-2+4\mathrm{i}$, $z_D=-2$, $z_E=-2\mathrm{i}$ e $z_F=2-2\mathrm{i}$.

51.2.1. $|z_A|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

51.2.2. $|z_C|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

51.2.3. $|z_E|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

52.1. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) \Leftrightarrow x = y$
O lugar geométrico dos afixos dos números complexos z que satisfazem a condição dada é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

52.2. $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z) \Leftrightarrow y = -x$
O lugar geométrico dos afixos dos números complexos z que satisfazem a condição dada é a bissetriz dos quadrantes pares.

52.3. $\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
O lugar geométrico dos afixos dos números complexos z que satisfazem a condição dada é o eixo imaginário.

52.4. $\text{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow y = 1$
O lugar geométrico dos afixos dos números complexos z que satisfazem a condição dada é a reta paralela ao eixo real e que passa pelo afixo do número i.

52.5. $|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$
O lugar geométrico dos afixos dos números complexos z que satisfazem a condição dada é a circunferência centrada na origem do referencial e de raio 2.

53.1. $3a + (b-1)\text{i} = 6 - 4\text{i} \Leftrightarrow 3a = 6 \wedge b - 1 = -4$
$\Leftrightarrow a = 2 \wedge b = -3$

53.2. $a^2 - b\text{i} = b + 4 \Leftrightarrow a^2 = b + 4 \wedge -b = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \wedge b = 0$
$\Leftrightarrow (a = 2 \vee a = -2) \wedge b = 0$

53.3. $a^2 - a\text{i} = 4 + 2\text{i} \Leftrightarrow a^2 = 4 \wedge -a = 2$
$\Leftrightarrow (a = 2 \vee a = -2) \wedge a = -2 \Leftrightarrow a = -2$

53.4. $a + (a-b)\text{i} = 3\text{i} \Leftrightarrow a = 0 \wedge a - b = 3 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = -3$

54.1. O conjugado de $-3+\text{i}$ é $-3-\text{i}$.

54.2. O conjugado de $2-5\text{i}$ é $2+5\text{i}$.

54.3. O conjugado de 2i é -2i.

54.4. O conjugado de -2 é -2.

Pág. 184

55.1. A imagem geométrica de $\bar{z}$ é o ponto A.

55.2. A imagem geométrica de $-z$ é o ponto B.

55.3. A imagem geométrica de $-\bar{z}$ é o ponto C.

56.1. $\text{Re}(z_B) = \text{Re}(z_A)$, logo $z_B = 2 + y\text{i}\ (y > 0)$.
$|z_B| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+y^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 4 + y^2 = 20$
$\Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = 4 \vee y = -4$
Então, $z_B = 2 + 4\text{i}$.

56.2. $A_{[ABC]} = \dfrac{3 \times 5}{2} = \dfrac{15}{2}$

Pág. 185

Tarefa 15

1.1. $z^2 - \sqrt{8}z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{\sqrt{8} \pm \sqrt{8-12}}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{2\sqrt{2} \pm 2\text{i}}{2}$
$\Leftrightarrow z = \sqrt{2} + \text{i} \vee z = \sqrt{2} - \text{i}$

$z_1 = \sqrt{2} + \text{i}$ e $z_2 = \sqrt{2} - \text{i}$, logo z_1 é o conjugado de z_2.

1.2.1. $\overline{OP} = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$,
$\overline{OQ} = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ e $\overline{PQ} = 2$.
$P_{[POQ]} = 2\sqrt{3} + 2$

1.2.2. $A_{[POQ]} = \dfrac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

2.1. Seja r o raio da circunferência representada na figura.
$r = |z_A| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ Então, $z_B = -\sqrt{5}\,\text{i}$.

2.2. $|t| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$
A imagem geométrica do número complexo $t = -\sqrt{2} - \sqrt{3}\,\text{i}$ é um ponto da circunferência representada na figura porque o seu módulo é igual ao raio.

2.3.1. $\overline{z_A} = -w \Leftrightarrow -2 - \text{i} = 3a + (-b+2)\text{i}$
$\Leftrightarrow -2 = 3a \wedge -1 = -b + 2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{2}{3} \wedge b = 3$

2.3.2. w é um número real $\Leftrightarrow \text{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow b - 2 = 0$
$\Leftrightarrow b = 2$
w é um número real quando $a \in \mathbb{R}$ e $b = 2$.

2.3.3. $w = -z_B \Leftrightarrow -3a + (b-2)\text{i} = \sqrt{5}\,\text{i}$
$-3a = 0 \wedge b - 2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 2 + \sqrt{5}$

2.4.1. $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{5}\}$
$\text{Im}(z) = 2 \wedge |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow y = 2 \wedge \sqrt{x^2+2^2} = \sqrt{5}$
$\Leftrightarrow y = 2 \wedge x^2 + 4 = 5 \Leftrightarrow y = 2 \wedge x^2 = 1$
$\Leftrightarrow y = 2 \wedge (x = 1 \vee x = -1)$
Então, $z = 1 + 2\text{i} \vee z = -1 + 2\text{i}$.

2.4.2. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) \wedge |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = y \wedge \sqrt{y^2+y^2} = \sqrt{5}$
$\Leftrightarrow x = y \wedge 2y^2 = 5$
$\Leftrightarrow x = y \wedge x^2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x = y \wedge \left(x = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \vee x = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$
$\Leftrightarrow x = y \wedge \left(x = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \vee x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$
Então, $z = \dfrac{\sqrt{10}}{2} + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\text{i} \vee z = -\dfrac{\sqrt{10}}{2} - \dfrac{\sqrt{10}}{2}\text{i}$.

2.4.3. $\text{Re}(z) + 1 = 0 \wedge |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = -1 \wedge \sqrt{(-1)^2 + y^2} = \sqrt{5}$
$\Leftrightarrow x = -1 \wedge 1 + y^2 = 5 \Leftrightarrow x = -1 \wedge y^2 = 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -1 \wedge (y = 2 \vee y = -2)$
Então, $z = -1 + 2\text{i} \vee z = -1 - 2\text{i}$.

Pág. 186

57. Sendo $z = a + b\text{i}$; $a, b \in \mathbb{R}$, então $\bar{z} = a - b\text{i}$, $-z = -a - b\text{i}$ e $-\bar{z} = -a + b\text{i}$.

Sejam P, Q, R e S as imagens geométricas dos números complexos z, $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$, respetivamente.
P, Q, R e S são os vértices de um retângulo.
$\overline{PQ} = 2|b|$ e $\overline{QR} = 2|a|$; logo, a área do retângulo é dada por: $\overline{PQ} \times \overline{QR} = 2|b| \times 2|a| = 4|b| \times |a| = 4|a\,b|$

58.1. $z_1 + z_2 = (3 - \text{i}) + (-1 + 2\text{i}) = 2 + \text{i}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

58.2. $\overline{z_1} - z_2 = (3 + i) - (-1 + 2i) = 3 + i + 1 - 2i = 4 - i$

58.3. $z_1 + (-z_2) + \overline{z_3} = (3 - i) + (1 - 2i) + \left(-\frac{i}{2}\right) = 4 - \frac{7}{2}i$

58.4. $z_3 - (z_1 + \overline{z_2}) = \frac{i}{2} - (3 - i - 1 - 2i) = \frac{i}{2} - 2 + 3i = -2 + \frac{7}{2}i$

59.1. $(x + 2i) + yi = 3 \Leftrightarrow x + (2 + y)i = 3 \Leftrightarrow x = 3 \wedge 2 + y = 0$
$\Leftrightarrow x = 3 \wedge y = -2$

59.2. $(x^2 - i) - (3 + yi) = 1 + 2i \Leftrightarrow (x^2 - 3) + (-1 - y)i = 1 + 2i$
$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \wedge -1 - y = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge -y = 3$
$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -2) \wedge y = -3$

59.3. $\overline{(1 - xi)} + 2i = y - 3xi + 1 \Leftrightarrow 1 + xi + 2i = y - 3xi + 1$
$\Leftrightarrow 1 + (x + 2)i = (y + 1) - 3xi \Leftrightarrow 1 = y + 1 \wedge x + 2 = -3x$
$\Leftrightarrow 0 = y \wedge 4x = -2 \Leftrightarrow y = 0 \wedge x = -\frac{1}{2}$

Pág. 187

60.1. $z_D = z_A + z_B = (-3 + i) + (1 + 2i) = -2 + 3i$
$z_C - z_B = z_D - z_A \Leftrightarrow z_C = (-2 + 3i) - (-3 + i) + (1 + 2i)$
$\Leftrightarrow z_C = 2 + 4i$

60.2.1. Simetria em relação à origem

60.2.2. Simetria em relação ao eixo real

61.1. $z \times (w + t) = (-2 + i) \times (3i + 1 - 2i) = (-2 + i) \times (1 + i)$
$= -2 - 2i + i + i^2 = -2 - i - 1 = -3 - i$

61.2. $t \times z - w = (1 - 2i) \times (-2 + i) - 3i = -2 + i + 4i - 2i^2 - 3i = 2i$

61.3. $z^2 + wt = (-2 + i)^2 + 3i\,(1 - 2i) = 4 - 4i - 1 + 3i + 6 = 9 - i$

Pág. 188

62.1. $w_1 = a + bi$ e $w_2 = c - bi$, $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$
$\overline{w_1} + w_1 = a - bi + a + bi = 2a$
A imagem geométrica de $\overline{w_1} + w_1$ pertence ao semieixo real negativo.

62.2. $w_2 - \overline{w_2} = c - bi - (c + bi) = c - bi - c - bi = -2bi$
A imagem geométrica de $w_2 - \overline{w_2}$ pertence ao semieixo imaginário negativo.

62.3. $\overline{w_1 + w_2} = \overline{(a + bi + c - bi)} = \overline{(a + c)} = a + c$
A imagem geométrica de $\overline{w_1 + w_2}$ pertence ao eixo real.

62.4. $i \times w_1 = i \times (a + bi) = ai + bi^2 = -b + ai$
A imagem geométrica de $i \times w_1$ pertence ao 3.º quadrante.

62.5. $-i \times \overline{w_2} = -i\,(c + bi) = -ci - bi^2 = -ci + b = b - ci$
A imagem geométrica de $-i \times \overline{w_2}$ pertence ao 4.º quadrante.

63.1. $z_1 \times z_2 = (-1 + 3i)(-2 - i) = 2 + i - 6i + 3 = 5 - 5i$

63.2. $z_1 \times \overline{z_2} = (-1 + 3i)(-2 + i) = 2 - i - 6i - 3 = = -1 - 7i$

63.3. $iz_1 \times z_3 - z_2 = i\,(-1 + 3i) \times (1 + 2i) - (-2 - i) =$
$= (-i - 3) \times (1 + 2i) + 2 + i = -i + 2 - 3 - 6i + 2 + i = 1 - 6i$

63.4. $z_2 \times \overline{(z_1 + z_3)} = (-2 - i)\,\overline{(-1 + 3i + 1 + 2i)} = (-2 - i)\,\overline{(5i)} =$
$= (-2 - i)(-5i) = 10i - 5 = -5 + 10i$

Pág. 189

64.1. $w = iz + \overline{z} = i\,(x + yi) + x - yi = xi - y + x - yi =$
$= (x - y) + (x - y)i$
$\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w)$, logo, as imagens geométricas dos números complexos w pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares.

64.2. $iz = \overline{z} \Leftrightarrow i\,(x + yi) = x - yi \Leftrightarrow xi - y = x - yi$
$\Leftrightarrow -y = x \wedge x = -y \Leftrightarrow y = -x$

64.3. $|z \times \overline{z}| = 9 \Leftrightarrow |z| \times |\overline{z}| = 9 \Leftrightarrow |z| \times |z| = 9 \Leftrightarrow |z|^2 = 9$
$\Leftrightarrow |z| = 3$

65.1. $\frac{z_2}{z_1} = \frac{-2 + i}{1 - 3i} = \frac{(-2 + i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{-2 - 6i + i - 3}{1 + 9} =$
$= \frac{-5}{10} + \frac{-5}{10}i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

65.2. $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{-2 + i} = \frac{1\,(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{-2 - i}{4 + 1} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

65.3. $\frac{z_1 + 1}{\overline{z_2}} = \frac{1 - 3i + 1}{-2 - i} = \frac{(2 - 3i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = \frac{-4 + 2i + 6i + 3}{4 + 1} =$
$= -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$

65.4. $\frac{z_1 + z_3}{\overline{z_3} + z_2} = \frac{1 - 3i - 1 + i}{-1 - i - 2 + i} = \frac{-2i}{-3} = \frac{2}{3}i$

65.5. $\frac{i}{z_3} + \frac{z_3}{i} = \frac{i}{-1 + i} + \frac{-1 + i}{i} = \frac{i\,(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} + \frac{(-1 + i)(-i)}{i\,(-i)} =$
$= \frac{-i + 1}{1 + 1} + \frac{i + 1}{1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i =$

66.1. $\frac{1}{w} = \frac{1}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{3} + i}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = \frac{\sqrt{3} + i}{3 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

66.2. $-\frac{1}{\overline{w}} = -\frac{1}{\sqrt{3} + i} = -\frac{\sqrt{3} - i}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = -\frac{\sqrt{3} - i}{3 + 1} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

Pág. 190

67. $u = \frac{4}{w} = \frac{4}{2 - i} = \frac{4\,(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{8 + 4i}{4 + 1} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$

raio $= |u| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ Logo, $v = \frac{4\sqrt{5}}{5}i$.

68. Como a imagem geométrica do complexo w se situa no 2.º quadrante, então sabe-se que $w = a + bi$, $a < 0 \wedge b > 0$.

$\frac{1}{w} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$

A imagem geométrica do complexo $\frac{1}{w}$ situa-se no 3.º quadrante porque $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{w}\right) < 0 \wedge \mathrm{Im}\left(\frac{1}{w}\right) < 0$ e corresponde ao número complexo z_2.

Pág. 191

69.1. $2i^3 = 2(-i) = -2i$

69.2. $(2i)^3 + (1 + i)^2 = 8i^3 + 1 + 2i - 1 = -8i + 2i = = -6i$

69.3. $(1 + 2i)^3 = (1 + 2i)^2\,(1 + 2i) = (1 + 4i - 4)(1 + 2i) =$
$= (-3 + 4i)(1 + 2i) = -3 - 6i + 4i - 8 = -11 - 2i$

70.1. $i^{5+k} + i^7 = 0 \Leftrightarrow i^5 \times i^k + i^{4+3} = 0 \Leftrightarrow i^1 \times i^k + i^3 = 0$
$\Leftrightarrow i^{1+k} - i = 0 \Leftrightarrow i^{1+k} = i \Leftrightarrow 1 + k = 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow k = 4n,\ n \in \mathbb{N}$

O menor número natural que verifica a condição é $k = 4$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

70.2. $\text{i}^{3k+2} = 1 \Leftrightarrow 3k + 2 = 4n\,,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k = \dfrac{-2+4n}{3}\,,\ n \in \mathbb{N}$

O menor número natural que verifica a condição é $k = 2$.

70.3. $\text{i}^{3k+2} = -1 \Leftrightarrow 3k + 2 = 4n + 2\,,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k = \dfrac{4n}{3}\,,\ n \in \mathbb{N}$

O menor número natural que verifica a condição é $k = 4$.

71.1. $\text{i}^{42} = \text{i}^{4\times10+2} = \text{i}^2 = -1$

71.2. $\text{i}^{11}(\text{i}^5 + 3\text{i}^{74}) = \text{i}^{4\times2+3}(\text{i}^{4+1} + 3\text{i}^{4\times18+2}) = \text{i}^3(\text{i}^1 + 3\text{i}^2) =$
$= -\text{i}(-3+\text{i}) = 1 + 3\text{i}$

71.3. $\text{i}^{4n-2} + \dfrac{1}{\text{i}^7} = \text{i}^{-2} + \dfrac{1}{\text{i}^3} = \dfrac{1}{\text{i}^2} + \dfrac{1}{-\text{i}} = -1 + \dfrac{\text{i}}{1} = -1 + \text{i}$

71.4. $\dfrac{1}{\text{i}^{4n+1}} - \dfrac{1}{\text{i}^{8n}} = \dfrac{1}{\text{i}^1} - \dfrac{1}{\text{i}^0} = \dfrac{1}{\text{i}} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{-\text{i}}{1} - 1 = -1 - \text{i}$

72. $\dfrac{1}{\text{i}^{15}} = \dfrac{1}{\text{i}^{4\times3+3}} = \dfrac{1}{\text{i}^3} = \dfrac{1}{-\text{i}} = \dfrac{1\times\text{i}}{-\text{i}\times\text{i}} = \dfrac{\text{i}}{1} = \text{i}$

Logo, i é solução da equação $\dfrac{1}{z^{15}} = \text{i}$.

Pág. 192

73. A é a soma de 191 termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão i e primeiro termo igual a 1.

Então:

$A = 1 + \text{i} + \text{i}^2 + \text{i}^3 + \ldots + \text{i}^{190} = 1 \times \dfrac{1-\text{i}^{191}}{1-\text{i}} = \dfrac{1-\text{i}^{4\times47+3}}{1-\text{i}} =$

$= \dfrac{1-\text{i}^3}{1-\text{i}} = \dfrac{(1+\text{i})(1+\text{i})}{(1-\text{i})(1+\text{i})} = \dfrac{1+2\text{i}-1}{2} = \text{i}$

74. B é a soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão i^2 e primeiro termo igual a 1.

Então:

$B = 1 + \text{i}^2 + \text{i}^4 + \text{i}^6 + \ldots + \text{i}^{2n-2} = 1 \times \dfrac{1-(\text{i}^2)^n}{1-\text{i}^2} = \dfrac{1-(-1)^n}{1+1} =$

$= \dfrac{1-(-1)^n}{2}$

Sabe-se que $(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$,

donde se conclui que $B = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

75.1. $z_1 = \text{i}^n\,,\ z_2 = \text{i}^{n+1} = \text{i}^n \times \text{i} = z_1 \times \text{i}\,,$
$z_3 = \text{i}^{n+2} = \text{i}^n \times \text{i}^2 = \text{i}^n \times (-1) = -z_1$ e
$z_4 = \text{i}^{n+3} = \text{i}^n \times \text{i}^3 = z_1 \times (-\text{i})$

Os números complexos têm todos módulo igual a 1 e cada um deles situa-se num dos quatro semieixos. Logo, são vértices de um quadrado centrado na origem.

Como o módulo de cada um dos números complexos z_1, z_2, z_3, e z_4 é 1, sabe-se que o lado l desse quadrado é dado por $l^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{2}$.

Assim sendo, o perímetro do quadrado é igual a $4\sqrt{2}$.

75.2. Se a imagem geométrica de z_1 se situa no semieixo real negativo é porque $z_1 = -1$.

$z_1 = -1 \Leftrightarrow \text{i}^n = \text{i}^{4k+2}\,,\ k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow n = 4k + 2\,,\ k \in \mathbb{N}_0$

Um valor possível é, por exemplo, $n = 2$.

Pág. 193

76.1. $\text{i}z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(\text{i}z - 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee \text{i}z - 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \dfrac{1}{\text{i}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \dfrac{1(-\text{i})}{\text{i}(-\text{i})}$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = -\text{i} \qquad z \in \{0\,,\ -\text{i}\}$

76.2. $2z - 3\text{i} = z\text{i} \Leftrightarrow 2z - z\text{i} = 3\text{i} \Leftrightarrow z(2-\text{i}) = 3\text{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{3\text{i}}{2-\text{i}}$

$z = \dfrac{3\text{i}(2+\text{i})}{(2-\text{i})(2+\text{i})} \Leftrightarrow z = \dfrac{6\text{i}-3}{4+1} \Leftrightarrow z = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}$

76.3. Fazendo $z = x + y_{\text{i}}$; $x\,,\ y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$\dfrac{2z}{\text{i}} + \dfrac{\bar{z}}{\text{i}^3} = \text{i} \Leftrightarrow \dfrac{2(x+y\text{i})}{\text{i}} + \dfrac{x-y\text{i}}{-\text{i}} = \text{i}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+2y\text{i})(-\text{i})}{\text{i}(-\text{i})} + \dfrac{(x-y\text{i})\times\text{i}}{-\text{i}\times\text{i}} = \text{i}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x\text{i}+2y}{1} + \dfrac{x\text{i}+y}{1} = \text{i} \Leftrightarrow 3y - x\text{i} = \text{i}$

$\Leftrightarrow 3y = 0 \wedge -x = 1 \Leftrightarrow y = 0 \wedge x = -1 \qquad$ Então, $z = -1$.

76.4. $z^3 + 3z = 0 \Leftrightarrow z(z^2+3) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -3$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\sqrt{-3} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = -\sqrt{3}\text{i} \vee z = \sqrt{3}\text{i}$

$z \in \{0\,,\ -\sqrt{3}\text{i}\,,\ \sqrt{3}\text{i}\}$

76.5. $z^2 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1+\sqrt{7}\text{i}}{2} \vee z = \dfrac{1-\sqrt{7}\text{i}}{2}$; $z \in \left\{\dfrac{1-\sqrt{7}\text{i}}{2}\,,\ \dfrac{1+\sqrt{7}\text{i}}{2}\right\}$

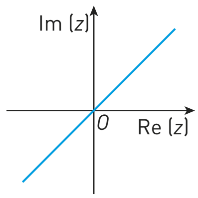
77.1. Fazendo $z = x + y\text{i}$; $x\,,\ y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$\text{i}z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow \text{i}(x+y\text{i}) + x - y\text{i} = 0 \Leftrightarrow x\text{i} - y + x - y\text{i} = 0$

$\Leftrightarrow (x-y) + (x-y)\text{i} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \wedge x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$

Três soluções da equação são, por exemplo,

$z = 1 + \text{i}\,,\ z = -2 - 2\text{i}$ e $z = 4 + 4\text{i}$.



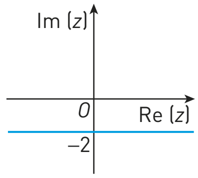
77.2. Fazendo $z = x + y\text{i}$; $x\,,\ y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$\text{Re}(z) - z = 2\text{i} \Leftrightarrow x - (x+y\text{i}) = 2\text{i} \Leftrightarrow x - x - y\text{i} = 2\text{i}$

$\Leftrightarrow -y\text{i} = 2\text{i} \Leftrightarrow -y = 2 \Leftrightarrow y = -2$

Três soluções da equação são, por exemplo,

$z = 1 - 2\text{i}\,,\ z = -2\text{i}$ e $z = -5 - 2\text{i}$.



78. Sendo 1 uma das soluções da equação $-x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$, sabe-se que o polinómio $-x^3 + x^2 - 2x + 2$ é divisível por $x - 1$.

Aplicando a Regra de Ruffini, tem-se:

	-1	1	-2	2
1		-1	0	-2
	-1	0	-2	0

$-x^3 + x^2 - 2x + 2$
$= (x-1)(-x^2-2)$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Então,

$-x^3+x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(-x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x^2=-2 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\sqrt{-2} \vee x=\sqrt{-2}$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-\sqrt{2}\,\mathrm{i} \vee x=\sqrt{2}\,\mathrm{i} \qquad x \in \{1\,,\,-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\,,\,\sqrt{2}\,\mathrm{i}\}$

79. Como o polinómio P é divisível por z^2+1 e $z^2+1=z^2-\mathrm{i}^2=(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$, então o polinómio também é divisível por $z-\mathrm{i}$ e por $z+\mathrm{i}$.

Para decompor o polinómio em fatores, vamos aplicar a Regra de Ruffini.

	1	0	5	0	4
i		i	−1	4i	−4
	1	i	4	4i	0
−i		−i	0	−4i	
	1	0	4	0	

$\Leftrightarrow z^2+4=0$

$\Leftrightarrow z^2=-4$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-4}$

$\Leftrightarrow z=2\mathrm{i} \vee z=-2\mathrm{i}$

Então, $P(z)=(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})$.

Pág. 194

Tarefa 16

1.1. $z_2=1+\dfrac{2-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=1+\dfrac{(2-\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=$

$=1+\dfrac{-2-2\mathrm{i}+\mathrm{i}-1}{1+1}=1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

A imagem geométrica de z_2 pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares porque $\mathrm{Re}(z_2)=\mathrm{Im}(z_2)$.

1.2. $z_1=\dfrac{-2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-2+2\mathrm{i}}{1+1}=-1+\mathrm{i}$

Sejam A e B as imagens geométricas dos números complexos z_1 e z_2.

Sabe-se que $A(-1\,,\,1)$ e $B\left(-\dfrac{1}{2}\,,\,-\dfrac{1}{2}\right)$.

A imagem geométrica do número complexo $z_3=a+1-a\mathrm{i}$, $a\in\mathbb{R}$ é colinear com as imagens geométricas dos números complexos z_1 e z_2, se pertencer à reta definida pelos pontos A e B.

O declive da reta é igual a -3 $\left(m=\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}=-3\right)$.

A reta é definida por $y-1=-3(x+1) \Leftrightarrow y=-3x-2$.

Então, a imagem geométrica do número complexo z_3 é colinear com as imagens geométricas dos números complexos z_1 e z_2 se

$-a=-3(a+1)-2 \Leftrightarrow -a=-3a-3-2 \Leftrightarrow a=-\dfrac{5}{2}$.

2.

Imagem geométrica	Número complexo
A	$-\overline{w}$
B	$\overline{w}$
C	$\overline{w}+1$
D	$\dfrac{1}{2}\overline{w}$
E	$w+\mathrm{i}$

3.1. $zw=\left(-2+\dfrac{b}{\mathrm{i}}\right)\left(\dfrac{a}{3}-2\mathrm{i}^3\right)=\left(-2+\dfrac{b(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}\right)\left(\dfrac{a}{3}-2(-\mathrm{i})\right)=$

$=(-2-b\mathrm{i})\left(\dfrac{a}{3}+2\mathrm{i}\right)=-\dfrac{2a}{3}-4\mathrm{i}-\dfrac{ab}{3}\mathrm{i}+2b=$

$=\left(-\dfrac{2a}{3}+2b\right)+\left(-4-\dfrac{ab}{3}\right)\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}(z\,w)=1 \wedge \mathrm{Im}(z)=3$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2a}{3}+2b=1 \wedge -b=3 \Leftrightarrow -\dfrac{2a}{3}-6=1 \wedge b=-3$

$\Leftrightarrow a=-\dfrac{21}{2}$ e $b=-3$

3.2. $z-w=\mathrm{i} \Leftrightarrow (-2-b\mathrm{i})-\left(\dfrac{a}{3}+2\mathrm{i}\right)=\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \left(-2-\dfrac{a}{3}\right)+(-b-2)\mathrm{i}=\mathrm{i} \Leftrightarrow -2-\dfrac{a}{3}=0 \wedge -b-2=1$

$\Leftrightarrow a=-6$ e $b=-3$

3.3. $w=-\overline{z} \Leftrightarrow \dfrac{a}{3}+2\mathrm{i}=-(-2+b\mathrm{i}) \Leftrightarrow \dfrac{a}{3}+2\mathrm{i}=2-b\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{3}=2 \wedge 2=-b \Leftrightarrow a=6$ e $b=-2$

4.1. $z^2+5=4z \Leftrightarrow z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{2} \vee z=\dfrac{4-2\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow z=2+\mathrm{i} \vee z=2-\mathrm{i}$

$z\in\{2+\mathrm{i}\,,\,2-\mathrm{i}\}$

4.2. Fazendo $z=x+y\mathrm{i}$; $x, y\in\mathbb{R}$ tem-se:

$2\overline{z}=\mathrm{i}-\dfrac{z}{1+\mathrm{i}} \Leftrightarrow 2(x-y\mathrm{i})=\mathrm{i}-\dfrac{x+y\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow 2x-2y\mathrm{i}=\mathrm{i}-\dfrac{(x+y\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow 2x-2y\mathrm{i}=\mathrm{i}-\dfrac{x+y\mathrm{i}-x\mathrm{i}+y}{2}$

$\Leftrightarrow 2x-2y\mathrm{i}=\dfrac{-x-y}{2}+\dfrac{2-y+x}{2}\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{-x-y}{2} \wedge -2y=\dfrac{2-y+x}{2}$

$\Leftrightarrow y=-5x \wedge x+3y=-2$

$\Leftrightarrow y=-5x \wedge x-15x=-2 \Leftrightarrow y=-\dfrac{5}{7} \wedge x=\dfrac{1}{7}$

$z=\dfrac{1}{7}-\dfrac{5}{7}\mathrm{i}$

4.3. Fazendo $z=x+y\mathrm{i}$; $x, y\in\mathbb{R}$ tem-se:

$z\,\overline{z}-\mathrm{i}z=2 \Leftrightarrow (x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})-\mathrm{i}(x+y\mathrm{i})=2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-x\mathrm{i}+y=2 \Leftrightarrow x^2+y^2+y=2 \wedge -x=0$

$\Leftrightarrow y^2+y-2=0 \wedge x=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{-1\pm3}{2} \wedge x=0$

$\Leftrightarrow (y=1 \vee y=-2) \wedge x=0$

$z\in\{-2\mathrm{i}\,,\,\mathrm{i}\}$

4.4. Fazendo $z=x+y\mathrm{i}$; $x, y\in\mathbb{R}$ tem-se:

$2z+\mathrm{i}=\overline{z} \Leftrightarrow 2(x+y\mathrm{i})+\mathrm{i}=x-y\mathrm{i} \Leftrightarrow 2x+2y\mathrm{i}+\mathrm{i}=x-y\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 2x+(2y+1)\mathrm{i}=x-y\mathrm{i} \Leftrightarrow 2x=x \wedge 2y+1=-y$

$\Leftrightarrow x=0 \wedge y=-\dfrac{1}{3}$

$z\in\left\{-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right\}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

4.5. $z^3 + 5z = 0 \Leftrightarrow z\,(z^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -5$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\sqrt{-5} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = -\sqrt{5}\text{i} \vee z = \sqrt{5}\text{i}$

$z \in \{0\,,\ -\sqrt{5}\text{i}\,,\ \sqrt{5}\text{i}\}$

4.6. Como 2 é solução da equação podemos recorrer à Regra de Ruffini para fatorizar o polinómio $P\,(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad P\,(z) = (z-2)\,(z^2+1)$$

$z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z-2)\,(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 2 \vee z^2 = -1 \Leftrightarrow z = 2 \vee z = \text{i} \vee z = -\text{i}$

$z \in \{2\,,\ -\text{i}\,,\ \text{i}\}$

Pág. 195

Tarefa 17

1. Sendo $A(3,\,1)$ e $B(-2\,,\ 4)$, então as coordenadas do ponto M , ponto médio de $[AB]$, são

$\left(\dfrac{3-2}{2}\,,\ \dfrac{1+4}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\,,\ \dfrac{5}{2}\right)$.

$z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3 + \text{i} - 2 + 4\text{i}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}$

Logo, o ponto médio de $[AB]$ é a imagem geométrica do número complexo z_M .

2. $z_C - z_B = z_A + z_B - z_B = z_A = z_A - z_0\ (\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA})$

$z_C - z_A = z_A + z_B - z_A = z_B = z_B - z_0\ (\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB})$

Então, o quadrilátero $[OABC]$ é um paralelogramo.

3. $|z_A + z_B|^2 + |z_A - z_B|^2 = (z_A + z_B)\,(\overline{z_A + z_B}) + (z_A - z_B)\,(\overline{z_A - z_B})$

$= (z_A + z_B)\,(\overline{z_A} + \overline{z_B}) + (z_A - z_B)\,(\overline{z_A} - \overline{z_B}) =$

$= z_A\overline{z_A} + z_A\overline{z_B} + z_B\overline{z_A} + z_B\overline{z_B} + z_A\overline{z_A} - z_A\overline{z_B} - z_B\overline{z_A} + z_B\overline{z_B}$

$= z_A\overline{z_A} + z_B\overline{z_B} + z_A\overline{z_A} + z_B\overline{z_B} = 2z_A\overline{z_A} + 2z_B\overline{z_B} =$

$= 2\left(|z_A|^2 + |z_B|^2\right)$

4. Aplicando a igualdade demonstrada na questão anterior, tem-se:

$|z + \text{i}|^2 + |z - \text{i}|^2 = 2\left(|z|^2 + |\text{i}|^2\right) = 2\,(\rho^2 + 1) = 2\,(1 + \rho^2)$

$\therefore\ |z + \text{i}|^2 + |z - \text{i}|^2 = 2\,(1 + \rho^2)$

5.1. $w \in A \Leftrightarrow |w - 1| = |w + \text{i}| \Leftrightarrow |x + y\text{i} - 1| = |x + y\text{i} + \text{i}|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$

$\Leftrightarrow -2x = 2y \Leftrightarrow y = -x$

5.2. $u \in A \Leftrightarrow |u - 1| = |u + \text{i}|$

$\Leftrightarrow |k^2 - 3\text{i} - 1| = |k^2 - 3\text{i} + \text{i}|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(k^2-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{(k^2)^2 + (-2)^2}$

$\Leftrightarrow (k^2 - 1)^2 + 9 = (k^2)^2 + 4 \Leftrightarrow k^4 - 2k^2 + 1 + 9 = k^4 + 4$

$\Leftrightarrow -2k^2 = -6 \Leftrightarrow k = \sqrt{3} \vee k = -\sqrt{3}$

5.3. $z \in A \wedge |z| = 2 \Leftrightarrow y = -x \wedge \sqrt{x^2 + y^2} = 2$

$\Leftrightarrow y = -x \wedge \sqrt{x^2 + (-x)^2} = 2 \Leftrightarrow y = -x \wedge 2x^2 = 4$

$\Leftrightarrow y = -x \wedge \left(x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}\right)$

$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\text{i} \vee z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\text{i}$

Pág. 196

Tarefa 18

1. Sabe-se que $P\left(4\cos\dfrac{\pi}{3}\,,\ 4\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ e $Q\left(7\cos\dfrac{\pi}{3}\,,\ 7\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, logo:

$z = 4\cos\dfrac{\pi}{3} + 4\sin\dfrac{\pi}{3}\text{i}\ ;\ = 4 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\ ;\ = 2 + 2\sqrt{3}\text{i}$ e

$w = 7\cos\dfrac{\pi}{3} + 7\sin\dfrac{\pi}{3}\text{i}\ ;\ = 7 \times \dfrac{1}{2} + 7 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\ ;\ = \dfrac{7}{2} + \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\text{i}$

2. $P\,(4\cos\theta\,,\ 4\sin\theta)$ e $Q\,(7\cos\theta\,,\ 7\sin\theta)$

3.1. z é um número real negativo se $\theta = \pi$.

3.2. $\text{Im}\,(w) > 0 \wedge \text{Re}\,(w) = 0$ se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

3.3. $\text{Im}\,(w) < 0 \wedge \text{Re}\,(w) < 0$ se $\theta \in \left]\pi\,,\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

3.4. $\text{Re}\,(z) = \text{Im}\,(z)$ se $\theta = \dfrac{\pi}{4} \vee \theta = \dfrac{5\pi}{4}$.

4.1. A imagem geométrica de u é o ponto $\left(-2\sqrt{3}\,,\ 2\right)$ logo, pertence ao 2.º quadrante.

4.2. A imagem geométrica de u pertence à circunferência C_1 porque $|u| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$.

Pág. 198

Tarefa 19

1.1. $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

1.2. $\text{tg}\,\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$

1.3. Se $\dfrac{4\pi}{3}$ é um argumento do complexo z_1 , então uma expressão geral dos argumentos de z_1 é: $\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

1.4.1. $z_1 = 2\,\text{cis}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

1.4.2. $z_1 = 2\,\text{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

1.5. $z_2 = 2\,\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \text{i}\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$= 1 - \sqrt{3}\text{i}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

2.

Número complexo	Módulo	Argumento positivo mínimo	Argumento principal
$1+i$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$-2+2i$	$2\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$3+\sqrt{3}i$	$2\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$1+\sqrt{3}i$	2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i$	$\sqrt{5}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-\sqrt{2}-\sqrt{6}i$	$2\sqrt{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$	3	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$

3.

Número complexo	Módulo	Argumento em $[0\,,\,2\pi[$
z_1	$\sqrt{13}$	0
z_2	4	$\frac{\pi}{2}$
z_3	2	π
z_4	3	$\frac{3\pi}{2}$

4.1. Se z é um imaginário puro e $\operatorname{Im}(z)>0$ então o argumento de z, no intervalo $[0\,,\,2\pi[$, é $\frac{\pi}{2}$.

4.2. Se z é um número real negativo então o seu argumento, no intervalo $[0\,,\,2\pi[$, é π.

4.3. Se z é um número real positivo então o seu argumento, no intervalo $[0\,,\,2\pi[$, é 0.

4.4. Se z é um imaginário puro e $\operatorname{Im}(z)<0$ então o argumento de z, no intervalo $[0\,,\,2\pi[$, é $\frac{3\pi}{2}$.

Pág. 199

80. Sendo M o ponto médio de $[OP]$, então $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OP}=1$.

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\wedge 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$$

Assim,

$$z_A=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3},\; z_B=2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3},\; z_C=2\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}\;\text{ e }\; z_D=2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}.$$

81.1. O argumento positivo mínimo do número complexo $z=2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{3}$ é $\frac{7\pi}{3}-2\pi=\frac{\pi}{3}$.

81.2. O argumento positivo mínimo do número complexo $z=\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ é $-\frac{3\pi}{4}+2\pi=\frac{5\pi}{4}$.

81.3. Seja θ um argumento de $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-1$$

e a imagem geométrica de z pertence ao 2.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z é $\frac{3\pi}{4}$.

81.4. O argumento positivo mínimo do número complexo $z=-\sqrt{5}i$ é $\frac{3\pi}{2}$ porque a imagem geométrica de z pertence ao semieixo imaginário negativo.

81.5. O argumento positivo mínimo do número complexo $z=-\pi$ é π porque a imagem geométrica de z pertence ao semieixo real negativo.

82.1. $|z_1|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z_1.

$\operatorname{tg}\theta=\frac{2}{-2}=-1$ e a imagem geométrica de z_1 pertence ao 2.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z_1 é $\frac{3\pi}{4}$.

Na forma trigonométrica, $z_1=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

82.2. $|z_2|=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+(-5)^2}=\sqrt{100}=10$

Seja θ um argumento de z_2.

$\operatorname{tg}\theta=\frac{-5}{5\sqrt{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de z_2 pertence ao 4.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z_2 é $\frac{11\pi}{6}$.

Na forma trigonométrica, $z_2=10\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

82.3. $z_3=\frac{\sqrt{2}}{1-i}=\frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$|z_3|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

Seja θ um argumento de z_3.

$\operatorname{tg}\theta=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$ e a imagem geométrica de z_3 pertence ao 1.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z_3 é $\frac{\pi}{4}$.

Na forma trigonométrica, $z_3=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

82.4. $|z_4|=\sqrt{\left(-4\sqrt{2}\right)^2+\left(-4\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{32+96}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z_4.

$\operatorname{tg}\theta=\frac{-4\sqrt{6}}{-4\sqrt{2}}=\sqrt{3}$ e a imagem geométrica de z_4 pertence ao 3.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z_4 é $\frac{4\pi}{3}$.

Na forma trigonométrica, $z_4=8\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

82.5. $|z_5|=\sqrt{0^2+(-\sqrt{7})^2}=\sqrt{7}$

O argumento positivo mínimo de z_5 é $\frac{3\pi}{2}$ porque a imagem geométrica de z_5 pertence ao semieixo imaginário negativo.

Na forma trigonométrica, $z_5=\sqrt{7}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

82.6. $|z_6| = \sqrt{(\sqrt{\pi})^2 + 0^2} = \sqrt{\pi}$

O argumento positivo mínimo de z_6 é 0 porque a imagem geométrica de z_6 pertence ao semieixo real positivo.

Na forma trigonométrica, $z_6 = \sqrt{\pi}\text{ cis }(0)$.

Pág. 200

Tarefa 20

1.1. $z = 3\text{ cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

1.2. $w = 3\text{ cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

1.3. $z + w = 3\text{ cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\text{ cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) + 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) =$

$= 3\sqrt{3}\text{i} = 3\sqrt{3}\text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

1.4. $z - w = 3\text{ cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\text{ cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) - 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) =$

$= 3 = 3\text{ cis }(0)$

1.5. $\overline{w} = 3\text{ cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 3\text{ cis}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = 3\text{ cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

2.1. z é um número real negativo se $\frac{\alpha + \pi}{5} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{\alpha + \pi}{5} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = 4\pi + 10k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in]0, 25\pi[$, conclui-se que $\alpha \in \{4\pi, 14\pi, 24\pi\}$.

2.2. z é um número imaginário puro e $\text{Im}(z) > 0$ se

$\frac{\alpha + \pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{\alpha + \pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 10k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in]0, 25\pi[$, conclui-se que $\alpha \in \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{23\pi}{2}, \frac{43\pi}{2}\right\}$.

2.3. A imagem geométrica de z pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se $\frac{\alpha + \pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{\alpha + \pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 5k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in]0, 25\pi[$, conclui-se que

$\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}, \frac{41\pi}{4}, \frac{61\pi}{4}, \frac{81\pi}{4}\right\}$.

3.1. $z_A = 2$; $z_B = 2\text{ cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(-\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 + \sqrt{3}\text{i}$ e

$z_C = 2\text{ cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(-\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}\text{i}$

3.2. $z_B = 2\text{ cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $z_D = 2\text{ cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\text{ cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$;

$z_E = 2\text{ cis}\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\text{ cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ e

$z_F = 2\text{ cis}\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\text{ cis}\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 2\text{ cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

4.1. $z = -\text{cis }\alpha = -\cos\alpha - \text{i}\sin\alpha = \cos(\pi + \alpha) + \text{i}\sin(\pi + \alpha) =$

$= \text{cis }(\pi + \alpha)$

4.2. $z = \cos\alpha - \text{i}\sin\alpha = \cos(-\alpha) + \text{i}\sin(-\alpha) = \text{cis }(-\alpha)$

4.3. $z = \sin\alpha + \text{i}\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Pág. 201

83.1. $|w_1| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

Seja θ um argumento de w_1.

$\text{tg }\theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ e a imagem geométrica de w_1 pertence ao 1.º quadrante. O argumento positivo mínimo de w_1 é $\frac{\pi}{3}$.

Na forma trigonométrica,

$w_1 = 4\text{ cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\text{ cis}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 4\text{ cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right)$. Logo, $w_1 = w_2$.

83.2. $\overline{w_2} = 4\text{ cis}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = 4\text{ cis}\left(-\frac{7\pi}{3} + 4\pi\right) = 4\text{ cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

O argumento positivo mínimo de $\overline{w_2}$ é $\frac{5\pi}{3}$.

84.1. $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de z.

$\text{tg }\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ e a imagem geométrica de z pertence ao 4.º quadrante. Um argumento de z é, por exemplo, $-\frac{\pi}{3}$.

Na forma trigonométrica, $z = 2\text{ cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Então, $\overline{z} = 2\text{ cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (1.º Q) e

$-z = 2\text{ cis}\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right) = 2\text{ cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (2.º Q)

84.2. $\overline{z} = 3\text{ cis}\left(-\frac{10\pi}{9}\right) = 3\text{ cis}\left(-\frac{10\pi}{9} + 2\pi\right) = 3\text{ cis}\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ (2.º Q) e

$-z = 3\text{ cis}\left(\pi + \frac{10\pi}{9}\right) = 3\text{ cis}\left(\frac{19\pi}{9} - 2\pi\right) = 3\text{ cis}\left(\frac{\pi}{9}\right)$ (1.º Q)

84.3. $z = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\text{ cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\overline{z} = 2\text{ cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (3.º Q) e

$-z = 2\text{ cis}\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = 2\text{ cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ (4.º Q)

84.4. $z = -\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right) = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) =$

$= \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + \text{i}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right) = \text{cis}\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

$\overline{z} = \text{cis}\left(-\frac{8\pi}{7}\right) = \text{cis}\left(-\frac{8\pi}{7} + 2\pi\right) = \text{cis}\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ (2.º Q);

$-z = \text{cis}\left(\pi + \frac{8\pi}{7}\right) = \text{cis}\left(\frac{15\pi}{7} - 2\pi\right) = \text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ (1.º Q)

NEMA12CPR2 © Porto Editora

85.1. $w = \dfrac{4}{-\sqrt{3}-i} = \dfrac{4\left(-\sqrt{3}+i\right)}{\left(-\sqrt{3}-i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)} = \dfrac{4\left(-\sqrt{3}+i\right)}{3+1} = -\sqrt{3}+i$

$|w| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de w.

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de w pertence ao 2.º quadrante. O argumento positivo mínimo de w é $\dfrac{5\pi}{6}$.

Na forma trigonométrica, $w = 2\text{ cis}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

$z = w \wedge \alpha \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow 2\text{ cis}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= 2\text{ cis}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \wedge \alpha \in]-\pi, \pi]$

$\Leftrightarrow \alpha + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in]-\pi, \pi]$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

85.2. $z = 3\text{ cis}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ é um imaginário puro e $\alpha \in]-\pi, \pi]$;

logo, tem-se: $\alpha + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in]-\pi, \pi]$

$\alpha = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow \alpha \in \left\{-\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right\}$

85.3. Seja $u = -\left(\sqrt{2}i - \sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}i + \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

$|u| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de u.

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{+\sqrt{2}} = -1$ e a imagem geométrica de u pertence ao 4.º quadrante. O argumento positivo mínimo de u é $\dfrac{7\pi}{4}$.

Na forma trigonométrica, $u = 2\text{ cis}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

$z = u \wedge \alpha \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow 2\text{ cis}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= 2\text{ cis}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) \wedge \alpha \in]-\pi, \pi]$

$\Leftrightarrow \alpha + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in]-\pi, \pi]$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{7\pi}{12}$

Pág. 202

86.1. $\left(2\text{ cis}\dfrac{\pi}{3}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\text{ cis}\dfrac{\pi}{6}\right) = 1\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

86.2. Seja $u = 1 - i$.

$|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de u.

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{-1}{1} = -1$ e a imagem geométrica de u pertence ao 4.º quadrante. O argumento positivo mínimo de u é $\dfrac{7\pi}{4}$.

Na forma trigonométrica, $u = \text{cis}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

$(1-i)\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \left(\sqrt{2}\text{ cis}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{2}\text{ cis}\left(\dfrac{7\pi}{4} + \dfrac{\pi}{5}\right) =$

$= \sqrt{2}\text{ cis}\left(\dfrac{39\pi}{20}\right)$

86.3. $-3\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \times (-2i) = 3\text{ cis}\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) \times 2\text{ cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) =$

$= 6\text{ cis}\left(\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 6\text{ cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

87. Um pentágono regular inscrito numa circunferência divide-a em 5 arcos geometricamente iguais, cada um deles com $\dfrac{2\pi}{5}$ de amplitude.

Sendo $z = 2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ então $w = 2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{5}\right) = 2\text{ cis}\left(\dfrac{17\pi}{30}\right)$.

$wz = \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{17\pi}{30}\right)\right) \times \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 4\text{ cis}\left(\dfrac{17\pi}{30} + \dfrac{\pi}{6}\right) =$

$= 4\text{ cis}\left(\dfrac{22\pi}{30}\right) = 4\text{ cis}\left(\dfrac{11\pi}{15}\right)$

Pág. 203

88. $\arg(z \times \bar{z}) = \arg(z) + \arg(\bar{z}) = \theta + (-\theta) = 0$

Um argumento de $z \times \bar{z}$ é 0 radianos.

89.1. $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de z.

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de z pertence ao 1.º quadrante. Um argumento de z é, por exemplo, $\dfrac{\pi}{6}$.

Na forma trigonométrica, $z = 2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$t = \dfrac{1}{2}\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}i$

89.2.1. $z \times t = \left(\sqrt{3} + i\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}i\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{4}i + \dfrac{\sqrt{2}}{4}i - \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)i$

89.2.2. $z \times t = \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 1\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

89.3. $\text{tg}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} =$

$= \dfrac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{6-2} = \dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$

90.1. $\arg(iz) = \arg(i) + \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + \arg(z)$

A imagem geométrica de iz situa-se no 3.º quadrante.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

90.2. $\arg(\mathrm{i}^2 z) = \arg(\mathrm{i}^2) + \arg(z) = \pi + \arg(z)$

A imagem geométrica de $\mathrm{i}^2 z$ situa-se no 4.º quadrante.

90.3. $\arg(-\mathrm{i}z) = \arg(-\mathrm{i}) + \arg(z) = -\dfrac{\pi}{2} + \arg(z)$

A imagem geométrica de $-\mathrm{i}z$ situa-se no 1.º quadrante.

90.4. $\arg(\mathrm{i}^7 \bar{z}) = \arg(\mathrm{i}^7) + \arg(\bar{z}) = \arg(-\mathrm{i}) + \arg(\bar{z}) =$

$= -\dfrac{\pi}{2} - \arg(z)$

A imagem geométrica de $\mathrm{i}^7 \bar{z}$ situa-se no 2.º quadrante.

91. $\arg\left(\dfrac{\mathrm{i}\,\bar{z}}{2}\right) = \arg\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) + \arg(\bar{z}) = \dfrac{\pi}{2} - \arg(z)$

O ponto D pode ser a imagem geométrica do número complexo $\dfrac{\mathrm{i}\,\bar{z}}{2}$.

Pág. 204

92. $z_C = \mathrm{i}\, z_A = 3\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$z_D = \mathrm{i}\, z_B = 3\operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\operatorname{cis}\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$

$z_E = -\mathrm{i}\, z_A = 3\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z_F = -\mathrm{i}\, z_B = 3\operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{5} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)$

93. $\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{7}\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{7} + 2\pi\right) = 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{13\pi}{7}\right)$

O número complexo que corresponde a $\dfrac{1}{w}$ é z_2.

94. Seja z um número complexo não nulo.

$z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Pág. 205

95.1. $|z_1| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

Seja θ um argumento de z_1.

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$ e a imagem geométrica de z_1 pertence ao 2.º quadrante.

O argumento positivo mínimo de z_1 é $\dfrac{2\pi}{3}$.

Na forma trigonométrica, $z_1 = \operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

$\dfrac{1}{z_1} \times \dfrac{1}{z_2} = 1\operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) \times \dfrac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{7}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{17\pi}{21}\right)$

95.2. $z_2 \times (-z_2) = 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{7}\right) \times 2\operatorname{cis}\left(\pi + \dfrac{\pi}{7}\right) = 4\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{7} + \dfrac{8\pi}{7}\right) =$

$= 4\operatorname{cis}\left(\dfrac{9\pi}{7}\right)$

95.3. $z_1 \times z_2^{-1} = \operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \times \dfrac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{7}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{11\pi}{21}\right)$

96.1. $z_1 = \operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}} = \frac{1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}} = \frac{(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i})}{(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i})(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i} + \sqrt{6}\,\mathrm{i} + \sqrt{6}}{2 + 2} = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)\mathrm{i}$$

96.2. $|z_2| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4}} = 1$

Seja θ um argumento de z_2.

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$ e a imagem geométrica de z_2 pertence ao 1.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z_2 é $\dfrac{\pi}{4}$.

Na forma trigonométrica, $z_2 = \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

96.3. $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ e $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Pág. 206

Tarefa 21

1.1. $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de z.

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ e a imagem geométrica de z pertence ao 1.º quadrante. Um argumento de z é, por exemplo, $\dfrac{\pi}{3}$.

Então, $z = 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$z^2 = z \times z = 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \times 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) = 4\operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$z^3 = z^2 \times z = 4\operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \times 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}(\pi)$

$z^4 = z^3 \times z = 8\operatorname{cis}(\pi) \times 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 16\operatorname{cis}\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = 16\operatorname{cis}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

1.2. $|z| = 2$, $|z^2| = 4$, $|z^3| = 8$ e $|z^4| = 16$.

$\dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{16}{8} = 2$

$\arg(|z|) = \dfrac{\pi}{3}$, $\arg(|z^2|) = \dfrac{2\pi}{3}$, $\arg(|z^3|) = \pi$ e

$\arg(|z^4|) = \dfrac{4\pi}{3}$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

Os módulos de z, z^2, z^3 e z^4 são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão 2 e os respetivos argumentos positivos mínimos são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{3}$.

1.3. $u = \text{cis}\,\frac{\pi}{3}$, $u^2 = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$, $u^3 = \text{cis}\,\pi$, $u^4 = \text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$

$|u| = |u^2| = |u^3| = |u^4| = 1$

Conclui-se, então, que as imagens geométricas dos números complexos u, u^2, u^3 e u^4 se situam sobre a circunferência centrada na origem e de raio 1.

1.4. Se $t = \text{cis}\,\theta$, então $t^n = \text{cis}\,(n\theta)$.

Como $|t^n| = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, sabe-se que a imagem geométrica do número complexo t^n, $n \in \mathbb{N}$ é um ponto da circunferência centrada na origem e de raio 1.

1.5.

$w^n = \left(\frac{1}{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$	Módulo	Um argumento
$w = \frac{1}{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
w^2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
w^3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3\pi}{3}$
w^4	$\frac{1}{16}$	$\frac{4\pi}{3}$
…	…	…
w^7	$\frac{1}{128}$	$\frac{7\pi}{3}$
w^8	$\frac{1}{256}$	$\frac{8\pi}{3}$
…	…	…
w^n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{n\pi}{3}$

2.1. $w = z^n = \left[2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^n = 2^n\,\text{cis}\left(\frac{n\pi}{5}\right)$

A imagem geométrica de w pertence ao 2.º quadrante se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{n\pi}{5} < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$.

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{n\pi}{5} < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + 2k < \frac{n}{5} < 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} + 10k < n < 5 + 10k$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

Assim, o menor valor de n é 3.

2.2. A imagem geométrica de w é um número real negativo se $\frac{n\pi}{5} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$.

$\frac{n\pi}{5} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow n = 5 + 10k$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

Assim, o menor valor de n é 5.

2.3. A imagem geométrica de w pertence ao 4.º quadrante se $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \frac{n\pi}{5} < 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$.

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \frac{n\pi}{5} < 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

$\frac{3}{2} + 2k < \frac{n}{5} < 2 + 2k$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

$\frac{15}{2} + 10k < n < 10 + 10k$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

Assim, o menor valor de n é 8.

2.4. A origem e as imagens geométricas de z e w são colineares se $\frac{n\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$.

$\frac{n\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow n = 1 + 10k$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

Assim, o menor valor de n é 1.

Pág. 207

97.1. $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z.

$\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1$ e a imagem geométrica de z pertence ao 1.º quadrante.

Um argumento de z é, por exemplo, $\frac{\pi}{4}$.

Então, $z = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$z^8 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^8 = (\sqrt{2})^8\,\text{cis}\left(8 \times \frac{\pi}{4}\right) = 16\,\text{cis}\,(2\pi) = 16$

Assim, conclui-se que z^8 representa um número real.

97.2. $\left(\frac{1}{z}\right)^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}\text{cis}\left(10 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= \frac{1}{32}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -\frac{1}{32}\text{i}$

Assim, conclui-se que $\left(\frac{1}{z}\right)^{10}$ representa um número imaginário puro.

97.3. $(2 - z)^5 = (2 - 1 - \text{i})^5 = (1 - \text{i})^5$

Seja $w = 1 - \text{i}$. $\quad |w| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de w.

$\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1$ e a imagem geométrica de w pertence ao 4.º quadrante. Um argumento de w é, por exemplo, $-\frac{\pi}{4}$.

Então, $w = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

$(2 - z)^5 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 = (\sqrt{2})^5\,\text{cis}\left(5 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= 4\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= -4 + 4\text{i}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 208

Tarefa 22

1.1. $z_1 = 1 \text{ cis } \frac{\pi}{6}$, logo

$$z_1^7 = \left(1\text{cis } \frac{\pi}{3}\right)^7 = 1 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{3}\right) = 1 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{3} - 2\pi\right) = 1 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3}\right) = z_1$$

1.2. $z_2^2 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 = 4 \text{ cis } \left(\frac{4\pi}{3}\right) = z_4$

1.3. $z_2^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{6\pi}{3}\right) = 8 \text{ cis } (2\pi) = z_5$

1.4. $\left(\frac{z_3}{z_4}\right)^5 = \left(\frac{4 \text{ cis } (\pi)}{4 \text{ cis } \left(\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^5 = \left(1 \text{ cis } \left(\pi - \frac{4\pi}{3}\right)\right)^5 = \left(1 \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5 =$

$$= 1 \text{ cis } \left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 1 \text{ cis } \left(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi\right) = 1 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3}\right) = z_1$$

1.5. $\left(\frac{2}{z_1}\right)^2 = \left(\frac{2 \text{ cis } 0}{1 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 = \left(2 \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 4 \text{ cis } \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = z_4$

2.1. O ponto A pertence ao primeiro quadrante e situa-se na bissetriz dos quadrantes ímpares. Logo, o argumento positivo mínimo do número complexo z_A é $\frac{\pi}{4}$.

Os menores valores positivos correspondentes a α e β são: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ e $\beta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

2.2.1. raio $= |z_A| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

$z_A = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{4}\right)$; $z_B = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{12}\right)$;

$z_C = 2 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{19\pi}{12}\right)$

$z_{A'} = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{2}\right)$; $z_{B'} = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{6}\right)$;

$z_{C'} = 2 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$z_{A''} = 2 \text{ cis } (\pi)$; $z_{B''} = 2 \text{ cis } \left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{5\pi}{3}\right)$;

$z_{C''} = 2 \text{ cis } \left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3}\right)$

2.2.2.1. $z_A^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_B^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{33\pi}{12}\right) = 8 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{4}\right) =$

$= 8 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{4} - 2\pi\right) = 8 \text{ cis } \left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_C^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{57\pi}{12}\right) = 8 \text{ cis } \left(\frac{19\pi}{4}\right) =$

$= 8 \text{ cis } \left(\frac{19\pi}{4} - 4\pi\right) = 8 \text{ cis } \left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Então $z_A^3 = z_B^3 = z_C^3$.

2.2.2.2. $z_{A'}^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$z_{B'}^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{21\pi}{2}\right) = 8 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{2}\right) =$

$= 8 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{2} - 2\pi\right) = 8 \text{ cis } \left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$z_{C'}^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{33\pi}{6}\right) = 8 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{2}\right) =$

$= 8 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{2} - 4\pi\right) = 8 \text{ cis } \left(\frac{3\pi}{2}\right)$ Então $z_{A'}^3 = z_{B'}^3 = z_{C'}^3$.

2.2.2.3. $z_{A''}^3 = (2 \text{ cis } (\pi))^3 = 8 \text{ cis } (3\pi) = 8 \text{ cis } (\pi)$

$z_{B''}^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{15\pi}{3}\right) = 8 \text{ cis } (15\pi) = 8 \text{ cis } (\pi)$

$z_{C''}^3 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 = 8 \text{ cis } \left(\frac{3\pi}{3}\right) = 8 \text{ cis } (\pi)$

Então $z_{A''}^3 = z_{B''}^3 = z_{C''}^3$.

3. $z_{A'}^6 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^6 = 64 \text{ cis } \left(\frac{6\pi}{2}\right) = 64 \text{ cis } (3\pi) = 64 \text{ cis } (\pi)$

$z_{B'}^6 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)^6 = 64 \text{ cis } \left(\frac{42\pi}{2}\right) = 64 \text{ cis } (21\pi) = 64 \text{ cis } (\pi)$

$z_{C'}^6 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)^6 = 64 \text{ cis } \left(\frac{66\pi}{6}\right) = 64 \text{ cis } (11\pi) = 64 \text{ cis } (\pi)$

$z_{\overline{A'}}^6 = \left(2 \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^6 = 64 \text{ cis } \left(-\frac{6\pi}{2}\right) = 64 \text{ cis } (-3\pi) = 64 \text{ cis } (\pi)$

$z_{\overline{B'}}^6 = \left(2 \text{ cis } \left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)^6 = 64 \text{ cis } \left(-\frac{42\pi}{2}\right) = 64 \text{ cis } (-21\pi) =$

$= 64 \text{ cis } (\pi)$

$z_{\overline{C'}}^6 = \left(2 \text{ cis } \left(-\frac{11\pi}{6}\right)\right)^6 = 64 \text{ cis } \left(-\frac{66\pi}{6}\right) = 64 \text{ cis } (-11\pi) =$

$= 64 \text{ cis } (\pi)$. Então $z_{A'}^6 = z_{B'}^6 = z_{C'}^6 = z_{\overline{A'}}^6 = z_{\overline{B'}}^6 = z_{\overline{C'}}^6$.

Pág. 209

Tarefa 23

1.1. $z_1 = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{2\pi}{3}\right)$;

$z_2 = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{6}\right)$;

$z_3 = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{6} + 3 \times \frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ cis } \left(\frac{5\pi}{3}\right)$

1.2. $z_0^4 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^4 = 16 \text{ cis } \left(\frac{4\pi}{6}\right) = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$= 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8\sqrt{3}i$

$z_1^4 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^4 = 16 \text{ cis } \left(\frac{8\pi}{3}\right) = 16 \text{ cis } \left(\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8\sqrt{3}i$

$z_2^4 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)^4 = 16 \text{ cis } \left(\frac{14\pi}{3}\right) = 16 \text{ cis } \left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8\sqrt{3}i$

$z_3^4 = \left(2 \text{ cis } \left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^4 = 16 \text{ cis } \left(\frac{20\pi}{3}\right) = 16 \text{ cis } \left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8\sqrt{3}i$

Conclusão: z_0, z_1, z_2 e z_3 são soluções da equação $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

2.1. $\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{4}\right) = \text{cis}\,(\pi) = -1$

Conclui-se que $\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é uma raiz índice 4 de -1 porque $\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = -1$.

2.2. $\left(\frac{1}{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = \frac{1}{8}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}\text{i}$

Conclui-se que $\frac{1}{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é uma raiz índice 3 de $\frac{1}{8}\text{i}$ porque $\left(\frac{1}{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = \frac{1}{8}\text{i}$.

3. Se $2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{15}\right)$ é uma das raízes índice 5 de um número complexo z, então $\left(2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right)^5 = z$.

$z = \left(2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right)^5 = 32\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{15}\right) = 32\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 32\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,\text{i}$

4.1. $|z_0| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de z_0.

$\text{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de z_0 pertence ao 1.º quadrante. Um argumento de z_0 é, por exemplo, $\frac{\pi}{6}$.

Logo, $z_0 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ' um argumento de z_1.

$\text{tg}\,\theta' = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de z_1 pertence ao 2.º quadrante. Um argumento de z_1 é, por exemplo, $\frac{5\pi}{6}$.

Logo, $z_1 = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

$z_0^3 = \left(2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = 8\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\text{i} = w$

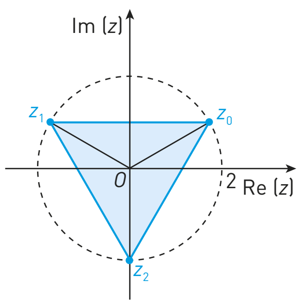
$z_1^3 = \left(2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^3 = 8\,\text{cis}\left(\frac{15\pi}{6}\right) = 8\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$= 8\text{i} = w$

$z_2^3 = (-2\text{i})^3 = -8\text{i}^3 = -8(-\text{i}) = 8\text{i} = w$

Então, z_0, z_1 e z_2 pertencem ao conjunto $\{z \in \mathbb{C} : z^3 = w\}$.

4.2.



4.3. Seja $z = \rho\,\text{cis}\,\theta$.

$z^3 = 8\text{i} \Leftrightarrow (\rho\,\text{cis}\,\theta)^3 = 8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \rho^3\,\text{cis}\,(3\theta) = 8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{8} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Se $k = 0$ resulta o número complexo $z_0 = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$.

Se $k = 1$ resulta o número complexo $z_1 = 2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$.

Se $k = 2$ resulta o número complexo $z_2 = 2\,\text{cis}\,\frac{9\pi}{6} = 2\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$.

Por atribuição de qualquer outro valor inteiro a k resultava um dos três números complexos z_0, z_1 ou z_2.

Daqui se conclui que a equação $z^3 = 8\text{i}$ tem três e só três soluções.

Pág. 210

98.1. $z_1^2 = \left(2\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^2 = 4\,\text{cis}\left(\frac{6\pi}{4}\right) = 4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4\text{i} = z_3$

Conclui-se que z_1 é uma raiz quadrada de z_3 porque $z_1^2 = z_3$.

98.2. $z_1^5 = \left(2\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^5 = 32\,\text{cis}\left(\frac{15\pi}{4}\right) = 32\,\text{cis}\left(\frac{15\pi}{4} - 2\pi\right) =$

$= 32\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = z_2$

Conclui-se que z_1 é uma raiz índice 5 de z_2 porque $z_1^5 = z_2$.

99.1. $z = \left(2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^n = 2^n\,\text{cis}\left(\frac{n\pi}{5}\right)$

z é um número real negativo se $\frac{n\pi}{5} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{n\pi}{5} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 5 + 10k$, $k \in \mathbb{Z}$

Assim sendo, o menor valor de n é 5.

99.2. $z = 2^5\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{5}\right) = 32\,\text{cis}\,\pi$

100. $w_1^3 = \left(2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = 8\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\text{i}$

$|w_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de w_2.

$\text{tg}\,\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de w_2 pertence ao 2.º quadrante.

Um argumento de w_2 é, por exemplo, $\frac{5\pi}{6}$.

Logo, $w_2 = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

$w_2^3 = \left(2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^3 = 8\,\text{cis}\left(\frac{15\pi}{6}\right) = 8\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\text{i}$

w_1 e w_2 são duas das raízes cúbicas do mesmo número complexo z porque $(w_1)^3 = (w_2)^3$. $\quad z = 8\text{i}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 211

101.1. $|w| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de w.

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$ e a imagem geométrica de w pertence ao 2.° quadrante.

O argumento positivo mínimo de w é $\dfrac{3\pi}{4}$. Logo, $w = 2\text{ cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

101.2. Seja $z = \rho\text{ cis}\,\theta$.

$z^4 = w \iff (\rho\text{ cis}\,\theta)^4 = 2\text{ cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$\iff \rho^4\text{ cis}\,(4\theta) = 2\text{ cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$\iff \begin{cases}\rho^4 = 2\\ 4\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\end{cases} \iff \begin{cases}\rho = \sqrt[4]{2}\\ \theta = \dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z}\end{cases}$

Se $k = 0$ tem-se $z_0 = \sqrt[4]{2}\text{ cis}\left(\dfrac{3\pi}{16}\right)$.

Se $k = 1$ tem-se $z_1 = \sqrt[4]{2}\text{ cis}\left(\dfrac{11\pi}{16}\right)$.

Se $k = 2$ tem-se $z_2 = \sqrt[4]{2}\text{ cis}\left(\dfrac{19\pi}{16}\right)$.

Se $k = 3$ tem-se $z_3 = \sqrt[4]{2}\text{ cis}\left(\dfrac{27\pi}{16}\right)$.

102.1. $z = w^4 = \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)^4 = 16\text{ cis}\left(\dfrac{4\pi}{12}\right) = 16\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

102.2. $(iw)^4 = \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)^4 = \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)^4 = 16\text{ cis}\left(\dfrac{7\pi}{3}\right) =$

$= 16\text{ cis}\left(\dfrac{7\pi}{3} - 2\pi\right) = 16\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = z$

$(-w)^4 = \left(2\text{ cis}\left(\pi + \dfrac{\pi}{12}\right)\right)^4 = \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)\right)^4 = 16\text{ cis}\left(\dfrac{13\pi}{3}\right) =$

$= 16\text{ cis}\left(\dfrac{13\pi}{3} - 4\pi\right) = 16\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = z$

$(-iw)^4 = \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)^4 = \left(2\text{ cis}\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)^4 = 16\text{ cis}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) =$

$= 16\text{ cis}\left(\dfrac{7\pi}{3} + 2\pi\right) = 16\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = z$

As outras raízes índice 4 de z são iw, $-w$ e $-iw$ porque $(iw)^4 = (-w)^4 = (-iw)^4 = z$.

103.1. A raiz cúbica de z que pertence ao 1.° quadrante é representada na forma trigonométrica por:

$2\text{ cis}\left(\dfrac{5\pi}{7} - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{21}\right)$.

103.2. $z = w^3 = \left(2\text{ cis}\left(\dfrac{5\pi}{7}\right)\right)^3 = 8\text{ cis}\left(\dfrac{15\pi}{7}\right) = 8\text{ cis}\left(\dfrac{15\pi}{7} - 2\pi\right) =$

$= 8\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

Seja $u = \rho\text{ cis}\,\theta$.

$u^2 = z \iff (\rho\text{ cis}\,\theta)^2 = 8\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{7}\right) \iff \rho^2\text{ cis}\,(2\theta) = 8\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

$\iff \begin{cases}\rho^2 = 8\\ 2\theta = \dfrac{\pi}{7} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\end{cases} \iff \begin{cases}\rho = 2\sqrt{2}\\ \theta = \dfrac{\pi}{14} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\end{cases}$

Se $k = 0$ tem-se $z_0 = 2\sqrt{2}\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{14}\right)$.

Se $k = 1$ tem-se $z_1 = 2\sqrt{2}\text{ cis}\left(\dfrac{15\pi}{14}\right)$

Pág. 212

104.1. $z = z_B^5 = \left(\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)^5 = \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

104.2.1. $z_A = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$

104.2.2. $z_D = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2 \times \dfrac{2\pi}{5}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{13\pi}{10}\right)$

104.2.3. $z_C = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{5}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$, logo $z_{\bar{C}} = \text{cis}\left(-\dfrac{9\pi}{10}\right)$.

105.1. $z_C = 2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{19\pi}{24}\right)$

$z_D = 2\text{ cis}\left(\dfrac{19\pi}{24} + \dfrac{2\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{31\pi}{24}\right)$

105.2. $w^n = \left(\text{cis}\left(\dfrac{19\pi}{24}\right)\right)^n = \text{cis}\left(\dfrac{19n\pi}{24}\right)$

$w^n \in \mathbb{R} \iff \dfrac{19n\pi}{24} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff n = \dfrac{24k}{5},\ k \in \mathbb{Z}$

Assim sendo, o menor valor de n é 24.

Pág. 213

106.1. $z_A = \rho\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, logo $k = z_A^5 = \left(\rho\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^5 = \rho^5\text{ cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Assim, conclui-se que a imagem geométrica de k pertence ao 4.° quadrante.

106.2. O argumento positivo mínimo da solução da equação cuja imagem geométrica pertence ao 3.° quadrante é $\dfrac{\pi}{3} + 2 \times \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{17\pi}{15}$.

107.1. $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1\text{ cis}\,(\pi)} = \sqrt[3]{1}\text{ cis}\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{3}\right),\ k \in \{0,\ 1,\ 2\}$

Se $k = 0$ tem-se $z_0 = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Se $k = 1$ tem-se $z_1 = \text{cis}\,(\pi)$.

Se $k = 2$ tem-se $z_1 = \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

As raízes índice 3 de -1 são $\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\text{cis}\,(\pi)$ e $\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

107.2. $\sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{4}\text{ cis}\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right),\ k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.

Se $k=3$ tem-se $z_3=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right)$.

As raízes índice 4 de $4i$ são:

$\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right)$, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ e $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right)$.

107.3. $\sqrt[4]{-16\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[4]{16\operatorname{cis}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[4]{16\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=$

$=\sqrt[4]{16}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\ k\in\{0,1,2,3\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{16}\right)$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=2\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{16}\right)$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=2\operatorname{cis}\left(\frac{21\pi}{16}\right)$.

Se $k=3$ tem-se $z_3=2\operatorname{cis}\left(\frac{29\pi}{16}\right)$.

As raízes índice 4 de $-16\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ são:

$2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{16}\right)$, $2\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{16}\right)$, $2\operatorname{cis}\left(\frac{21\pi}{16}\right)$ e $2\operatorname{cis}\left(\frac{29\pi}{16}\right)$.

108.1. $z^4+256i=0 \Leftrightarrow z^4=-256i \Leftrightarrow z^4=256\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{256\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{256}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right),\ k\in\{0,1,2,3\}$

$\Leftrightarrow z=4\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right),\ k\in\{0,1,2,3\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=4\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=4\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=4\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{8}\right)$.

Se $k=3$ tem-se $z_3=4\operatorname{cis}\left(\frac{15\pi}{8}\right)$.

$z\in\left\{4\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right);\ 4\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right);\ 4\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{8}\right);\ 4\operatorname{cis}\left(\frac{15\pi}{8}\right)\right\}$

108.2. $z^2=\frac{1-i}{i} \Leftrightarrow z^2=\frac{(1-i)(-i)}{i(-i)} \Leftrightarrow z^2=\frac{-i-1}{1}$

$\Leftrightarrow z^2=-1-i \Leftrightarrow z^2=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{2}\right),\ k\in\{0,1\}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{8}+k\pi\right),\ k\in\{0,1\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right)$.

$z\in\left\{\sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right),\ \sqrt[4]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right\}$

108.3. $z^4-iz=0 \Leftrightarrow z(z^3-i)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z^3=i$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\sqrt[3]{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\sqrt[3]{1}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\ k\in\{0,1,2\}$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=1\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right),\ k\in\{0,1,2\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

$z\in\left\{0,\ \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right),\ \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right),\ \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$

108.4. Se $z=\rho\operatorname{cis}\theta$, então $\bar{z}=\rho\operatorname{cis}(-\theta)$.

$z^2+\bar{z}=0 \Leftrightarrow (\rho\operatorname{cis}\theta)^2+\rho\operatorname{cis}(-\theta)=0=$

$=\rho^2\operatorname{cis}(2\theta)=-\rho\operatorname{cis}(-\theta) \Leftrightarrow \rho^2\operatorname{cis}(2\theta)=\rho\operatorname{cis}(\pi-\theta)$

$\begin{cases}\rho^2=\rho\\ 2\theta=\pi-\theta+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho(\rho-1)=0\\ 3\theta=\pi+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho=0 \vee \rho=1\\ \theta=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Soluções da equação, para $k\in\{0,1,2\}$.

$z=0 \vee z=\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} \vee z=\operatorname{cis}\pi \vee z=\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$

$z\in\left\{-1,\ 0,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

108.5. Seja $z\in C\setminus\{0\}$.

Se $z=\rho\operatorname{cis}\theta$, então $\bar{z}=\rho\operatorname{cis}(-\theta)$.

$\frac{z^3}{\bar{z}}-1=\sqrt{3}i \Leftrightarrow \frac{(\rho\operatorname{cis}\theta)^3}{\rho\operatorname{cis}(-\theta)}=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\rho^3\operatorname{cis}(3\theta)}{\rho\operatorname{cis}(-\theta)}=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \rho^2\operatorname{cis}(4\theta)=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho^2=2\\ 4\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho=\sqrt{2}\\ \theta=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Soluções da equação para $k\in\{0,1,2,3\}$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$z = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{12} \vee z = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{12} \vee z = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{13\pi}{12} \vee$

$\vee\; z = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{19\pi}{12}$

$z \in \left\{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right),\ \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right),\ \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right),\right.$

$\left.\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right\}$

Pág. 214

109.1. $z_A = 2\,\text{cis}\,(\pi) = -2\text{i}$

$z_B = 2\,\text{cis}\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = 1 - \sqrt{3}\,\text{i}$

$z_C = 2\,\text{cis}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = 1 + \sqrt{3}\,\text{i}$

As coordenadas dos vértices do triângulo são

$A(-2,\ 0)$, $B\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$ e $C\left(1,\ \sqrt{3}\right)$.

109.2. Uma rotação de centro O em que a imagem do vértice B pertence ao semieixo positivo real tem amplitude $\frac{\pi}{3}$.

$z_{A'} = 2\,\text{cis}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$

$= 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = -1 - \sqrt{3}\,\text{i}$

$z_{B'} = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{cis}\,(2\pi) = 2$

$z_{C'} = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = -1 + \sqrt{3}\,\text{i}$

As coordenadas dos vértices do triângulo são

$A'\left(-1,\ -\sqrt{3}\right)$, $B'(2,\ 0)$ e $C'\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$.

110.1. Se as imagens geométricas dos números complexos $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$ são raízes e são dois vértices consecutivos de um polígono regular inscrito, com n lados, numa circunferência de centro na origem, então sabe-se que $\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{2\pi}{n}$.

$\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{n}$

$\Leftrightarrow n = 6$

110.2. O polígono é um hexágono regular.

Os números complexos correspondentes aos restantes vértices do polígono são:

$z_3 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right),$

$z_4 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right),$

$z_5 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ e

$z_6 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Pág. 215

Tarefa 24

1. O vértice C tem de coordenadas $(2,\ 2)$, logo o vértice A tem de coordenadas $(-2,\ -2)$.

O simétrico de A em relação ao eixo real é o ponto D de coordenadas $(-2,\ 2)$.

$w = -2 + 2\text{i} = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

2.1.1. As coordenadas dos vértices do triângulo $[EFA]$ são:

$E(2,\ 0)$, $F(0,\ 2)$ e $A(-2,\ -2)$.

As coordenadas dos vértices do triângulo que se obtém a partir do triângulo $[EFA]$ por aplicação de uma reflexão em relação ao eixo real são:

$E'(2,\ 0)$, $F'(0,\ -2)$ e $A'(-2,\ 2)$.

2.1.2. As coordenadas dos vértices do triângulo que se obtém a partir do triângulo $[EFA]$ por aplicação de uma rotação de centro O e 90° de amplitude são:

$E'(0,\ 2)$, $F'(-2,\ 0)$ e $A'(2,\ -2)$.

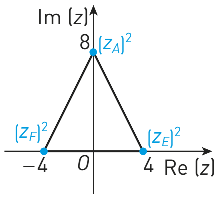
2.1.3. As coordenadas dos vértices do triângulo que se obtém a partir do triângulo $[EFA]$ por aplicação de uma rotação de centro O e 30° de amplitude são:

$E'\left(1,\ \sqrt{3}\right)$, $F'\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$ e $A'\left(1 - \sqrt{3},\ 1 + \sqrt{3}\right)$.

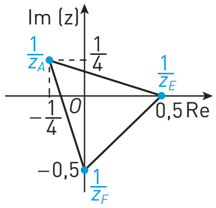
2.1.4. As coordenadas dos vértices do triângulo que se obtém a partir do triângulo $[EFA]$ por aplicação de uma translação associada ao vetor $\vec{u} = (0,\ 1)$ são:

$E'(2,\ 1)$, $F'(0,\ 3)$ e $A'(-2,\ -1)$.

2.2.1.



2.2.2.



3.1. $z_1 z_2 = \text{cis}\,\theta \times \text{cis}\,\beta = (\cos\theta + \text{i}\sin\theta)(\cos\beta + \text{i}\sin\beta) =$

$= \cos\theta\cos\beta + \text{i}\cos\theta\sin\beta + \text{i}\sin\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta =$

$= (\cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta) + (\cos\theta\sin\beta + \sin\theta\cos\beta)\,\text{i}$

3.2.1. $z_1 z_2 = \text{cis}\,\theta \times \text{cis}\,\beta = \text{cis}\,(\theta + \beta) = \cos(\theta + \beta) + \text{i}\sin(\theta + \beta)$

Logo, e atendendo ao resultado obtido em **3.1.**, conclui-se que $\cos(\theta + \beta) = \cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta$.

3.2.2. $z_1 z_2 = \text{cis}\,\theta \times \text{cis}\,\beta = \text{cis}\,(\theta + \beta) = \cos(\theta + \beta) + \text{i}\sin(\theta + \beta)$

Logo, e atendendo ao resultado obtido em **3.1.**, conclui-se que $\sin(\theta + \beta) = \sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 216

Tarefa 25

1.1. Ponto D **1.2.** Ponto A

1.3. Ponto D **1.4.** Ponto C

2. As coordenadas dos pontos A e B são

$A\left(\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\right)$ e $B\left(2\sqrt{2}\,,\ 2\sqrt{2}\right)$, respetivamente, logo

$\overline{AB}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=2$.

$\left|z_A-z_B\right|=\left|2\text{ cis }\frac{\pi}{4}-4\text{ cis }\frac{\pi}{4}\right|=\left|\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i\right|=$

$=\left|-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2$

Conclusão: $\overline{AB}=\left|z_A-z_B\right|=2$.

3.1. Ponto A **3.2.** Ponto F

4.1. $|z|=2$ **4.2.** $\text{Im}\,(z)=4$

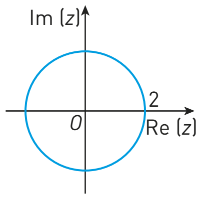
4.3. $|z|=4\wedge 0\leqslant \arg\,(z)\leqslant\frac{\pi}{4}$

4.4. $\arg\,(z-z_A)\leqslant\frac{\pi}{4}$

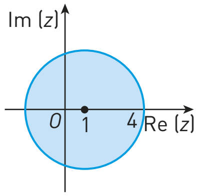
4.5. $|z-z_C|=|z-z_B|$

Pág. 217

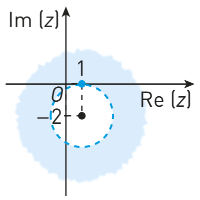
111.1. $|z|=2$



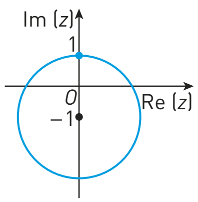
111.2. $|z-1|\leqslant 3$



111.3. $|z-1+2i|>2$



111.4. $|z+i|=|-2i|$



112.1. $|z|=3$

112.2. $|z-3+i|=2$

Pág. 218

113.1. $r=\overline{AO}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

O conjunto de pontos representado é definido pela condição:

$|z-1-2i|<\sqrt{5}$.

113.2. O conjunto de pontos representado é definido pela condição:

$|z-2i|\leqslant 2\wedge|z-3i|>1$.

113.3. O conjunto de pontos representado é definido pela condição:

$|z-3|<5\wedge|z+3|<5$

Pág. 219

114.1. Coroa circular centrada na imagem geométrica de $-2+i$ e de raios 1 e 3 .

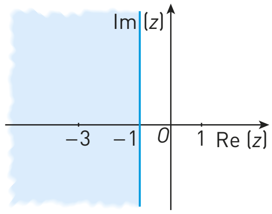
114.2. Mediatriz do segmento de reta de extremos $(0\,,\ 0)$ e $(4\,,\ 0)$.

114.3. Mediatriz do segmento de reta de extremos $(0\,,\ 1)$ e $(1\,,\ 0)$.

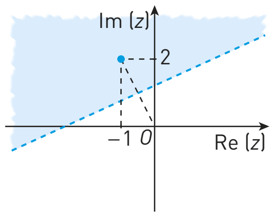
114.4. Mediatriz do segmento de reta de extremos $(0\,,\ -1)$ e $(0\,,\ 1)$.

114.5. Mediatriz do segmento de reta de extremos $(1\,,\ -1)$ e $(-3\,,\ 0)$.

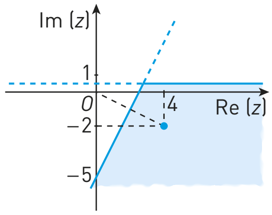
115.1.



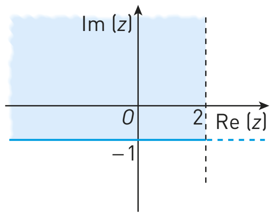
115.2.



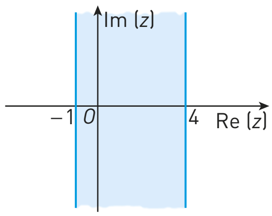
115.3.



115.4.



115.5.



NEMA12CPR2 © Porto Editora

Pág. 220

116.1. $|z| \leqslant |z - 4 - 4i|$

116.2. $-1 \leqslant \text{Im}(z) \leqslant 1 \land -2 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 2$

116.3. $|z| \leqslant |z - 3 - 3i| \land |z| \leqslant |z + 3 - 3i| \land \text{Im}(z) \geqslant 0$

Pág. 221

117.1. Semieixo real negativo

117.2. Eixo imaginário

117.3. Bissetriz do 2.º quadrante

117.4. 1.º quadrante

118.1. O conjunto de pontos representado é definido pela condição: $\frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

118.2. $\arg(w) = \arg(iz) = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

O conjunto de pontos representado é definido pela condição: $\frac{5\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{7\pi}{4}$.

119. O centro da circunferência é o ponto $A\left(2,\ 2\sqrt{3}\right)$ e esta é tangente ao eixo real, logo o seu raio é igual a $2\sqrt{3}$.

$z_A = 2 + 2\sqrt{3}i = 4 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Então, o conjunto de pontos representado é definido pela condição:

$|z - 2 - 2\sqrt{3}i| < 2\sqrt{3} \land \frac{\pi}{3} < \arg\left(z - 2 - 2\sqrt{3}i\right) < \pi$

Pág. 224

Proposta 1

A imagem geométrica do número complexo z pertence ao 2.º quadrante, logo $z = \rho \text{ cis } \theta$, $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

$$\frac{i}{z} = \frac{\text{cis}\frac{\pi}{2}}{\rho \text{ cis}(-\theta)} = \frac{1}{\rho}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \frac{1}{\rho}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

Como $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\frac{\pi}{2} + \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Assim, a imagem geométrica de $\frac{i}{z}$ é um ponto que pertence ao 3.º quadrante.

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 2

A circunferência representada tem centro M e raio $[MA]$.

M é o ponto médio de $[AB]$, logo

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 + 3i + 2 + i}{2} = 2i.$$

$$\overline{MA} = |z_M - z_A| = |2i - (-2 + 3i)| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

CD é perpendicular a $[AB]$ e passa no seu ponto médio; então, sabe-se que CD é a mediatriz de $[AB]$.

A opção correta é a **(D)**.

Proposta 3

w é um número complexo imaginário puro diferente de zero tal que $\text{Im}(z) < 0$, logo sabe-se que $w = bi$, $b < 0$.

$(1 + i)\,\overline{w} = (1 + i)(-bi) = -bi + b = b - bi$, $b < 0$

A imagem geométrica de $(1 + i)\,\overline{w}$ pertence ao segundo quadrante. Então, o número complexo que pode ser igual a $(1 + i)\,\overline{w}$ é z_2.

A opção correta é a **(B)**.

Pág. 225

Proposta 4

Seja $z = x + yi$, x, $y \in \mathbb{R}$.

$iz = \overline{z} \Leftrightarrow i(x + yi) = x - yi \Leftrightarrow xi - y = x - yi$

$\Leftrightarrow -y = x \land x = -y \Leftrightarrow y = -x$

Conclui-se que as imagens geométricas dos números complexos z que satisfazem a condição $iz = \overline{z}$ pertencem à bissetriz dos quadrantes pares.

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 5

$z\overline{z} = |3 + 4i| \Leftrightarrow |z|^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow |z|^2 = 5 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{5}$

Conclui-se que os números complexos z que satisfazem a condição $z\overline{z} = |3 + 4i|$ pertencem a uma circunferência.

A opção correta é a **(A)**.

Proposta 6

1.1. $z + w \times t = -2 + i + (-3i)(-1 - 2i) = -2 + i + 3i - 6$
$= -8 + 4i$

1.2. $w \times \overline{t} = (-3i)(-1 + 2i) = 3i + 6 = 6 + 3i$

1.3. $z^2 - w = (-2 + i)^2 - (-3i) = 4 - 4i - 1 + 3i = 3 - i$

2.1. $\frac{w}{z} = \frac{-3i}{-2 + i} = \frac{(-3i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{6i - 3}{4 + 1} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

A imagem geométrica do complexo $\frac{w}{z}$ pertence ao 2.º quadrante.

2.2. $\frac{z - t}{w} = \frac{-2 + i - (-1 - 2i)}{-3i} = \frac{(-1 + 3i)(3i)}{(-3i)(3i)} =$

$= \frac{-3i - 9}{9} = -1 - \frac{1}{3}i$

A imagem geométrica do complexo $\frac{z - t}{w}$ pertence ao 3.º quadrante.

Proposta 7

1. Seja $z = -i(5 + 4i) + (2i + 1)^2 + i^2$.

$z = -i(5 + 4i) + (2i + 1)^2 + i^2 = -5i + 4 + 4i^2 + 4i + 1 - 1 = -i$

z representa um número imaginário puro porque $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

2. $\frac{i}{1-i} + (i^2+i)\left(i^2+\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{i\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)} + (-1+i)\left(-1+\frac{1}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} + (-1+i)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0$

3. Seja $w = \left[\left(2-\frac{1}{i}\right)^2 - \overline{(3-i)}\right]^2$.

$w = \left[\left(2-\frac{1}{i}\right)^2 - \overline{(3-i)}\right]^2 = \left[\left(2-\frac{1\,(-i)}{i\,(-i)}\right)^2 - (3+i)\right]^2 =$

$= \left[(2+i)^2 - 3 - i\right]^2 = (4+4i-1-3-i)^2 = (3i)^2 = 9i^2 = -9$

w representa um número real negativo porque $\text{Im}\,(w) = 0$ e $\text{Re}\,(w) < 0$.

Pág. 226

Proposta 8

1. $w = i^{18} - \frac{2i^{27}+i^{10}}{i^5} = i^{4\times4+2} - \frac{2i^{4\times6+3}+i^{4\times2+2}}{i^{4\times1+1}} = i^2 - \frac{2i^3+i^2}{i^1} =$

$= -1 - \frac{-2i-1}{i} = -1 - \frac{(-2i-1)\,(-i)}{i\,(-i)} = -1 - \frac{-2+i}{1} =$

$= -1+2-i = 1-i$

$z = \frac{(2+i)^2 - i}{1-i} = \frac{4+4i-1-i}{1-i} = \frac{(3+3i)\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)} =$

$= \frac{3+3i+3i-3}{1+1} = 3i$

A imagem geométrica do complexo z é o vértice C e a imagem geométrica do complexo w é o vértice H.

2. $\frac{z\,\overline{w}}{3} = \frac{3i\,(1+i)}{3} = \frac{3i-3}{3} = -1+i = -w$

Então, D é a imagem geométrica de $\frac{z\,\overline{w}}{3}$.

Proposta 9

1. $3z+2i = iz-4 \Leftrightarrow 3z - iz = -4-2i \Leftrightarrow z\,(3-i) = -4-2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{-4-2i}{3-i} \Leftrightarrow z = \frac{(-4-2i)\,(3+i)}{(3-i)\,(3-i)}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-12-4i-6i+2}{9+1} \Leftrightarrow z = \frac{-10-10i}{10} \Leftrightarrow z = -1-i$

2. $\frac{z}{2-i} = 1+3i \Leftrightarrow z = (1+3i)\,(2-i) \Leftrightarrow z = 2-i+6i+3$

$\Leftrightarrow z = 5+5i$

3. Seja $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$2z - i = \bar{z} \Leftrightarrow 2x+2yi-i = x-yi \Leftrightarrow 2x = x \wedge 2y-1 = -y$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge y = \frac{1}{3}$

Então, $z = \frac{1}{3}i$.

4. Seja $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$z - 2\bar{z} = i + i^2 \Leftrightarrow x+yi-2(x-yi) = i-1$

$\Leftrightarrow x+yi-2x+2yi = i-1 \Leftrightarrow -x = -1 \wedge 3y = 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \wedge y = \frac{1}{3}$

Então, $z = 1+\frac{1}{3}i$.

5. $z^2+6z+13 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-6+4i}{2} \vee z = \frac{-6-4i}{2}$

$\Leftrightarrow z = -3+2i \vee z = -3-2i$

$z \in \{-3+2i\,,\ -3-2i\}$

6. $z^3+3iz = 0 \Leftrightarrow z\,(z^2+3i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -3i$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = 3\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt{3\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\,,\ k \in \{0\,,\ 1\}$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{4} \vee z = \sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{4}$

$z \in \left\{0\,,\ \sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right),\ \sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right\}$

7. $2z^4+3z^2-20 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{-3\pm\sqrt{169}}{4}$

$\Leftrightarrow z^2 = \frac{5}{2} \vee z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \vee z = \pm\sqrt{-4}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{10}}{2} \vee z = +\frac{\sqrt{10}}{2} \vee z = 2i \vee z = -2i$

$z \in \left\{\frac{\sqrt{10}}{2}\,,\ -\frac{\sqrt{10}}{2}\,,\ 2i\,,\ -2i\right\}$

8. $4z-5 = z^2 \Leftrightarrow z^2-4z+5 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$

$\Leftrightarrow z = \frac{4+2i}{2} \vee z = \frac{4-2i}{2} \Leftrightarrow z = 2+i \vee z = 2-i$

$z \in \{2+i\,,\ 2-i\}$

9. $z^3 - iz^2 = 5\,(i-z) \Leftrightarrow z^3 - iz^2 = 5i - 5z$

$\Leftrightarrow z^3 - iz^2 + 5z - 5i = 0$

Como i é uma das soluções da equação, aplicando a regra de Ruffini tem-se:

	1	$-i$	5	$-5i$
i		i	0	$5i$
	1	0	5	0

$z^3 - iz^2 + 5z - 5i = 0 \Leftrightarrow (z-i)\,(z^2+5) = 0$

$\Leftrightarrow z = i \vee z^2 = -5 \Leftrightarrow z = i \vee z = \sqrt{5}i \vee z = -\sqrt{5}i$

$z \in \{i\,,\ \sqrt{5}i\,,\ -\sqrt{5}i\}$

Proposta 10

1. $P\,(i) = -i^4 + 2i^3 - 7i^2 + 2i - 6 = -1-2i+7+2i-6 = 0$

2. $z^2+1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-1}$

$\Leftrightarrow z = i \vee z = -i$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Como i e $-\mathrm{i}$ são soluções da equação $P(z)=0$, aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	-1	2	-7	2	-6
i		$-\mathrm{i}$	$1+2\mathrm{i}$	$-2-6\mathrm{i}$	6
	-1	$2-\mathrm{i}$	$-6+2\mathrm{i}$	$-6\mathrm{i}$	0
$-\mathrm{i}$		i	$-2\mathrm{i}$	$6\mathrm{i}$	
	-1	2	-6	0	

$P(z)=(z^2+1)(az^2+bz+c)$

$\Leftrightarrow (z^2+1)(-z^2+2z-6)=(z^2+1)(az^2+bz+c)$

Então, conclui-se que $a=-1$, $b=2$ e $c=-6$.

3. $P(z)=0 \Leftrightarrow (z^2+1)(-z^2+2z-6)=0$

$\Leftrightarrow z^2+1=0 \vee -z^2+2z-6=0$

$\Leftrightarrow z^2=-1 \vee z=\dfrac{-2\pm\sqrt{-20}}{-2}$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i} \vee z=-\mathrm{i} \vee z=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{5}\mathrm{i}}{-2}$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i} \vee z=-\mathrm{i} \vee z=1+\sqrt{5}\mathrm{i} \vee z=1-\sqrt{5}\mathrm{i}$

$z\in\left\{\mathrm{i}\,,\ -\mathrm{i}\,,\ 1+\sqrt{5}\mathrm{i}\,,\ 1-\sqrt{5}\mathrm{i}\right\}$

Proposta 11

1. $z=\dfrac{1-2k\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(1-2k\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{1-2\mathrm{i}-2k\mathrm{i}-4k}{1+4}$

$=\dfrac{1-4k}{5}+\dfrac{-2-2k}{5}\mathrm{i}$

O número complexo z é um imaginário puro se $\mathrm{Re}\,(z)=0$ e $\mathrm{Im}\,(z)\neq 0$.

$\mathrm{Re}\,(z)=0 \wedge \mathrm{Im}\,(z)\neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-4k}{5}=0 \wedge \dfrac{-2-2k}{5}\neq 0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{4} \wedge k\neq -1 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{4}$

O número complexo z é um imaginário puro quando $k=\dfrac{1}{4}$.

2. O número complexo z é um número real se $\mathrm{Im}\,(z)=0$.

$\mathrm{Im}\,(z)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2-2k}{5}=0 \Leftrightarrow k=-1$

O número complexo z é um número real quando $k=-1$.

3. A imagem geométrica de z pertence à bissetriz dos quadrantes pares se $\mathrm{Im}\,(z)=-\mathrm{Re}\,(z)$.

$\mathrm{Im}\,(z)=-\mathrm{Re}\,(z) \Leftrightarrow \dfrac{-2-2k}{5}=-\dfrac{1-4k}{5}$

$\Leftrightarrow -2-2k=-1+4k \Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{6}$

z tem imagem geométrica pertencente à bissetriz dos quadrantes pares quando $k=-\dfrac{1}{6}$.

Pág. 227

Proposta 12

1.1. Se n é par, então

$\dfrac{\mathrm{i}^{4n-1}+\mathrm{i}^{2n+1}}{\mathrm{i}^{8n}-\mathrm{i}^{2n+3}}=\dfrac{\mathrm{i}^{-1}+\mathrm{i}^{1}}{\mathrm{i}^{0}-\mathrm{i}^{3}}=\dfrac{\dfrac{1(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\,(-\mathrm{i})}+\mathrm{i}}{1-(-\mathrm{i})}=\dfrac{-\mathrm{i}+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=0\,.$

1.2. Se n é ímpar, então

$\dfrac{\mathrm{i}^{4n-1}+\mathrm{i}^{2n+1}}{\mathrm{i}^{8n}-\mathrm{i}^{2n+3}}=\dfrac{\mathrm{i}^{-1}-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^{0}-\mathrm{i}}=\dfrac{\dfrac{1(-\mathrm{i})}{i\,(-\mathrm{i})}-\mathrm{i}}{1-i}=\dfrac{-\mathrm{i}-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-2\mathrm{i}\,(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=$

$=\dfrac{-2\mathrm{i}+2}{2}=1-\mathrm{i}\,.$

2. $\mathrm{i}^{3n}=\mathrm{i} \Leftrightarrow 3n=4k+1\,,\ k\in\mathbb{N}_0 \Leftrightarrow n=\dfrac{4k+1}{3}\,,\ k\in\mathbb{N}_0$

Se $k=8$ então $n=11$. Se $k=11$ então $n=15$.

Se $k=14$ então $n=19$. Se $k=74$ então $n=99$.

A sequência 11, 15, 19, ..., 99, ... tem termo geral $4n+7$.

$4n+7=99 \Leftrightarrow 4n=92 \Leftrightarrow n=23$

Assim, conclui-se que há 23 números naturais de dois algarismos que são solução da equação $\mathrm{i}^{3n}=\mathrm{i}$.

Proposta 13

1. $z_B=2\,z_P=2\,(2+2\mathrm{i})=4+4\mathrm{i}$

$z_A=6-\dfrac{1}{\mathrm{i}^5}=6-\dfrac{1}{\mathrm{i}^1}=6-\dfrac{1\,(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\,(-\mathrm{i})}=6+\mathrm{i}$

$z_C=z_B-z_A=4+4\mathrm{i}-(6+\mathrm{i})=4+4\mathrm{i}-6-\mathrm{i}=-2+3\mathrm{i}$

2. $w=z_A+z_B+z_C=6+\mathrm{i}+4+4\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}=8+8\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}\,(w)=\mathrm{Im}\,(w)=8$

Proposta 14

1. $|z|=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z.

$\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{4}{4}=1$ e a imagem geométrica de z pertence ao 1.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z é $\dfrac{\pi}{4}$.

Então, $z=4\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. $z=5\ \mathrm{cis}\,(\pi)$

3. $|z|=\sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$

Seja θ um argumento de z.

$\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{-3}=-\sqrt{3}$ e a imagem geométrica de z pertence ao 2.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z é $\dfrac{2\pi}{3}$.

Então, $z=6\ \mathrm{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

4. $z=\pi\ \mathrm{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

5. $z=\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

6. $|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Seja θ um argumento de z.

$\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{-3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de z pertence ao 3.º quadrante. O argumento positivo mínimo de z é $\dfrac{7\pi}{6}$.

Então, $z=2\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

7. $|z| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z.

$\text{tg}\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de z pertence ao 4.° quadrante. O argumento positivo mínimo de z é $\frac{11\pi}{6}$.

Então, $z = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

8. $|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de z.

$\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$ e a imagem geométrica de z pertence ao 2.° quadrante. O argumento positivo mínimo de z é $\frac{3\pi}{4}$.

Então, $z = 2\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

9. $z = \frac{(1+i)^2\, i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+2i-1)\,i}{\sqrt{3}+i} = \frac{-2}{\sqrt{3}+i} = \frac{-2(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} =$

$= \frac{-2\sqrt{3}+2i}{3+1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

Seja θ um argumento de z.

$\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de z pertence ao 2.° quadrante. O argumento positivo mínimo de z é $\frac{5\pi}{6}$.

Então, $z = \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

10. $z = i - \frac{i}{1+i} = i - \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = i - \frac{i+1}{1+1} = i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Seja θ um argumento de z.

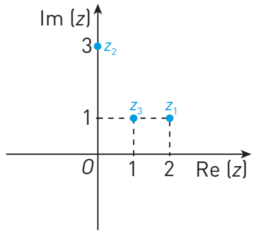
$\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$ e a imagem geométrica de z pertence ao 2.° quadrante. O argumento positivo mínimo de z é $\frac{3\pi}{4}$.

Então, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Pág. 228

Proposta 15

1. $|z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$; $|z_2| = 3$; $|z_3| = \sqrt{2}$



2. $\overline{z_1} \longrightarrow$ simetria em relação ao eixo real

$-z_3 \longrightarrow$ simetria em relação à origem do referencial

$i\,z_2 \longrightarrow$ rotação de 90° centrada na origem

Proposta 16

Sendo $z = 2\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, então,

$-z = 2\,\text{cis}\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{5}\right)$.

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 17

Sendo $z = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{9\pi}{7}\right)$, então

$\bar{z} = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{9\pi}{7}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{9\pi}{7} + 2\pi\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{7}\right)$.

A opção correta é a **(A)**.

Proposta 18

Se a imagem geométrica de z está no 4.° quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então sabe-se que

$z = \rho\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Logo, $\bar{z} = \rho\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\rho\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\rho\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 19

$w^8 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^8 = (\sqrt{2})^8\,\text{cis}\left(\frac{16\pi}{5}\right) = 16\,\text{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$

O argumento positivo mínimo de w^8 é $\frac{6\pi}{5}$ (3.° quadrante).

A opção correta é a **(C)**.

Pág. 229

Proposta 20

1. $w = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= 1 + \sqrt{3}i$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$w - 2 = 1 + \sqrt{3}i - 2 = -1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$(w-2)^5 = \left(2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^5 = 32 \operatorname{cis}\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 32 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$(w-2)^5 = 32 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 32\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$

$= 32\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -16 - 16\sqrt{3}i$

2. $\bar{z} + i^{15} = -4 - 3i + i^{4\times3+3} = -4 - 3i + i^3 =$

$= -4 - 3i - i = -4 - 4i$

Seja $w = \bar{z} + i^{15}$.

$|w| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de w.

$\operatorname{tg}\theta = \frac{-4}{-4} = 1$ e a imagem geométrica de z pertence ao 3.º quadrante. O argumento positivo mínimo de w é $\frac{5\pi}{4}$.

Então, $w = 4\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

3. $z_D = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + 3 \times \frac{2\pi}{5}\right) = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{23\pi}{15}\right)$

Proposta 21

1. $z = \frac{1}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

$w = 1 - \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$

$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

Seja θ um argumento de w.

$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$ e a imagem geométrica de w pertence ao 4.º quadrante. O argumento positivo mínimo de w é $\frac{5\pi}{3}$.

Na forma trigonométrica, $w = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

2. $w^n = \left(\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^n = \operatorname{cis}\left(\frac{5n\pi}{3}\right)$

w^n é um número real se $\frac{5n\pi}{3} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$.

$\frac{5n\pi}{3} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = \frac{3}{5}k$, $k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

Assim, o menor valor de n é 3.

Proposta 22

1. $w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$

$\left(2 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^4 + \left(2 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^2 + 16 = 4i^3$

$\Leftrightarrow 16 \operatorname{cis}(3\pi) + 4 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 16 = -4i$

$\Leftrightarrow -16 - 4i + 16 = -4i \Leftrightarrow -4i = -4i$ (P. verdadeira)

Conclui-se, então, que w é solução da equação $z^4 + z^2 + 16 = 4i^3$.

2. $iz^3 = w \Leftrightarrow z^3 = \frac{w}{i} \Leftrightarrow z^3 = \frac{2 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow z^3 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow z^3 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}$, $k \in \{0, 1, 2\}$

Se $k = 0$ tem-se $z_0 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Se $k = 1$ tem-se $z_1 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Se $k = 2$ tem-se $z_2 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$.

$z \in \left\{\sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right), \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right), \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right\}$.

Proposta 23

1. $w^3 = (-1 + 2i)^3 = (-1 + 2i)^2(-1 + 2i) = (1 - 4i - 4)(-1 + 2i)$

$= (-3 - 4i)(-1 + 2i) = 3 - 6i + 4i + 8 = 11 - 2i$

2. $w^3 = \left(\sqrt{5} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3 \operatorname{cis}\theta = 5\sqrt{5}\cos\theta + i\, 5\sqrt{5}\sin\theta$

$w^3 = 11 - 2i \Leftrightarrow 5\sqrt{5}\cos\theta + i\, 5\sqrt{5}\sin\theta = 11 - 2i$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}} \wedge \sin\theta = \frac{-2}{5\sqrt{5}}$

Então, $\operatorname{tg}\theta = -\frac{2}{11}$.

Pág. 230

Proposta 24

$|z_A| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Se $z_A = \sqrt{10} \operatorname{cis}\theta$, então

$z_B = \sqrt{10} \operatorname{cis}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{10}\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Como $\sqrt{10}\cos\theta + i\sqrt{10}\sin\theta = 1 + 3i$, conclui-se que

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ e que $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3} =$

$= \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$$

Assim, tem-se

$$z_B=\sqrt{10}\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}+i\,\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\right)=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Conclui-se, então, que $B\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\,,\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Proposta 25

1. $v=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+2i$$

$$\frac{u}{v}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2+2i}=\frac{(-1+\sqrt{3}i)\,(2-2i)}{(2+2i)\,(2-2i)}=$$

$$=\frac{-2+2i+2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}}{4+4}=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$$

$$u=-1+\sqrt{3}i=2\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\frac{u}{v}=\frac{2\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\wedge\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\wedge\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Proposta 26

1. $z_2=iz_1=i\,(4+3i)=-3+4i\,,\ z_3=-z_1=-4-3i$ e $z_4=-z_2=3-4i$

2. $|z_1|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$$5\operatorname{cis}\theta=4+3i\Leftrightarrow 5\cos\theta+i\,5\sin\theta=4+3i$$

$$\Leftrightarrow 5\cos\theta=4\wedge 5\sin\theta=3\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{4}{5}\wedge\sin\theta=\frac{3}{5}$$

3. $\overline{AB}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$$\overline{AO}^2+\overline{BO}^2=\overline{AB}^2\Leftrightarrow 2\,\overline{AO}^2=8\Leftrightarrow\overline{AO}^2=4\Leftrightarrow\overline{AO}=2$$

Então, $|w|=2$.

4. $w=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{6}\sin\theta=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$$

Logo,

$$w=2\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{10}+\frac{3\sqrt{3}+4}{10}i\right)=\frac{4\sqrt{3}-3}{5}+\frac{3\sqrt{3}+4}{5}i\,.$$

Proposta 27

1. $w=1+\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=$

$$=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|w|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$$

Seja θ um argumento de w .

$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e a imagem geométrica de w pertence ao 1.º quadrante. O argumento positivo mínimo de w é $\frac{\pi}{6}$.

Então, $w=\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$z=w^n=\left(\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^n=\sqrt{3}^n\operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

z é um imaginário puro se $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n=3+6k\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$$

Assim, o menor valor de n é 3 .

2. z é um número real se $\frac{n\pi}{6}=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{n\pi}{6}=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=6k\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$$

Assim, o menor valor de n é 6 .

Pág. 231

Proposta 28

1.1. $v=\left(\frac{1}{1-i}+i^{11}\right)^3=\left(\frac{1+i}{(1-i)\,(1+i)}+i^3\right)^3=\left(\frac{1+i}{2}-i\right)^3=$

$$=\left(\frac{1-i}{2}\right)^3=\left(\frac{1-i}{2}\right)^2\left(\frac{1-i}{2}\right)=\left(\frac{1-2i-1}{4}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$

1.2. $|v|=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

A imagem geométrica de v situa-se no 3.º quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo

$$v=\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right).$$

$$\frac{v}{t}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

1.3. $t^4 = \left(2 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 16 \text{ cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \text{i} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$

$= 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = -8 - 8\sqrt{3}\text{i}$

1.4. $w = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \text{i} \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + \text{i} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) =$

$= \text{cis}\left(\frac{5\pi}{14}\right)$

2. $w^7 = \left(\text{cis}\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)^7 = \text{cis}\left(\frac{35\pi}{14}\right) = \text{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{i}$

w^7 representa um número imaginário puro porque $\text{Re}(w^7) = 0$ e $\text{Im}(w^7) \neq 0$.

Proposta 29

1. $z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16 \text{ cis } \pi}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16} \text{ cis } \frac{\pi + 2k\pi}{4}, \ k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Se $k = 0$ tem-se $z_0 = 2 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Se $k = 1$ tem-se $z_1 = 2 \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Se $k = 2$ tem-se $z_2 = 2 \text{ cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Se $k = 3$ tem-se $z_3 = 2 \text{ cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

$z \in \left\{2 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{4}\right), 2 \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right), 2 \text{ cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right), 2 \text{ cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right\}$

2. $z^3 - 1 = \text{i} \Leftrightarrow z^3 = 1 + \text{i} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}, \ k \in \{0, 1, 2\}$

Se $k = 0$ tem-se $z_0 = \sqrt[6]{2} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Se $k = 1$ tem-se $z_1 = \sqrt[6]{2} \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Se $k = 2$ tem-se $z_2 = \sqrt[6]{2} \text{ cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$.

$z \in \left\{\sqrt[6]{2} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2} \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right), \sqrt[6]{2} \text{ cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right\}$

3. Se $z = \rho \text{ cis } \theta$, então $\bar{z} = \rho \text{ cis } (-\theta)$.

$z^3 \text{i} = \bar{z} \Leftrightarrow (\rho \text{ cis } \theta)^3 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho \text{ cis } (-\theta)$

$\Leftrightarrow \rho^3 \text{ cis } (3\theta) \text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho \text{ cis } (-\theta)$

$\Leftrightarrow \rho^3 \text{ cis}\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \rho \text{ cis } (-\theta)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2 - 1) = 0 \\ 4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Soluções da equação para $k \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$z = 0 \vee z = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right) \vee z = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right) \vee z = \text{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right) \vee$

$\vee z = \text{cis}\left(\frac{11\pi}{8}\right)$

$z \in \left\{0, \text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{11\pi}{8}\right)\right\}$

4. Se $z = \rho \text{ cis } \theta$, então $\bar{z} = \rho \text{ cis } (-\theta)$.

$z^3 = 4\bar{z} \Leftrightarrow (\rho \text{ cis } \theta)^3 = 4\rho \text{ cis } (-\theta)$

$\Leftrightarrow \rho^3 \text{ cis } (3\theta) = 4\rho \text{ cis } (-\theta)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 4\rho \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2 - 4) = 0 \\ 4\theta = 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 2 \\ \theta = \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Soluções da equação para $k \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$z = 0 \vee z = 2 \text{ cis } (0) \vee z = 2 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \vee z = 2 \text{ cis } (\pi) \vee$

$\vee z = 2 \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$z \in \left\{0, 2 \text{ cis } (0), 2 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right), 2 \text{ cis } (\pi), 2 \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$

5. $(1 + \text{i}) z^6 - 2z\text{i} = 0 \Leftrightarrow z\left((1 + \text{i}) z^5 - 2\text{i}\right) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^5 = \frac{2\text{i}}{1 + \text{i}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z^5 = \frac{2\text{i}(1 - \text{i})}{(1 + \text{i})(1 - \text{i})}$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^5 = 1 + \text{i} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[5]{\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[10]{2} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5}, \ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Atribuindo os valores a k, conclui-se que:

$z \in \left\{0, \sqrt[10]{2} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{20}\right), \sqrt[10]{2} \text{ cis}\left(\frac{9\pi}{20}\right), \sqrt[10]{2} \text{ cis}\left(\frac{17\pi}{20}\right),\right.$

$\left.\sqrt[10]{2} \text{ cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right), \sqrt[10]{2} \text{ cis}\left(\frac{33\pi}{20}\right)\right\}$

6. Se $z = \rho \text{ cis } \theta$, então $\bar{z} = \rho \text{ cis } (-\theta)$.

$\frac{z^5 \bar{z}}{\text{i} - 1} = (4\text{i})^3 \Leftrightarrow (\rho \text{ cis } \theta)^5 \rho \text{ cis } (-\theta) = -64\text{i} (\text{i} - 1)$

$\Leftrightarrow \rho^5 \text{ cis } (5\theta) \rho \text{ cis } (-\theta) = 64 + 64\text{i}$

$\Leftrightarrow \rho^6 \text{ cis } (4\theta) = 64\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^6 = 64\sqrt{2} \\ 4\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[6]{64\sqrt{2}} \\ \theta = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 6\sqrt[12]{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Conjunto-solução da equação para $k \in \{0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\}$:

$$\left\{6\sqrt[12]{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{16}\right),\ 6\sqrt[12]{2}\ \text{cis}\left(\frac{9\pi}{16}\right),\ 6\sqrt[12]{2}\ \text{cis}\left(\frac{17\pi}{16}\right),\ 6\sqrt[12]{2}\ \text{cis}\left(\frac{25\pi}{16}\right)\right\}$$

Proposta 30

1. $z = 2\ \text{cis}\ \theta$ e $z^2 = (2\ \text{cis}\ \theta)^2 = 4\ \text{cis}\ (2\theta)$

Assim, $A\hat{O}B = 2\theta - \theta = \theta$.

Seja h a altura do triângulo $[OAB]$ relativa ao vértice A .

Então, $\sin\theta = \dfrac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2\sin\theta$.

Conclui-se que $A\,(\theta) = \dfrac{4 \times 2\sin\theta}{2} = 4\sin\theta$.

2. $A\,(\theta) = 2 \wedge 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 4\sin\theta = 2 \wedge 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{2} \wedge 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$

$z^5 = \left(2\ \text{cis}\ \dfrac{\pi}{6}\right)^5 = 32\ \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 32\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$

$= 32\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = -16\sqrt{3} + 16\text{i}$

Proposta 31

1. $w = (z_0)^3 = \left(3\ \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)^3 = 27\ \text{cis}\left(\dfrac{15\pi}{4}\right) = 27\ \text{cis}\left(\dfrac{15\pi}{4} - 4\pi\right) =$

$= 27\ \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 27\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= 27\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{27\sqrt{2}}{2} - \dfrac{27\sqrt{2}}{2}\text{i}$

2. Designemos por z_1 e z_2 as outras duas raízes cúbicas de w .

$z_1 = 3\ \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\ \text{cis}\left(\dfrac{23\pi}{12}\right)$ e

$z_2 = 3\ \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2 \times \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\ \text{cis}\left(\dfrac{31\pi}{12}\right) = 3\ \text{cis}\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

3. As imagens geométricas das raízes cúbicas de w correspondem aos vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 3 .

Designemos por l o lado do triângulo $[OAB]$.

$\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\frac{l}{2}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l}{6} \Leftrightarrow l = 3\sqrt{3}$

Logo, $P = 3l = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Pág. 232

Proposta 32

1. O número complexo z_C é o simétrico de z_A em relação ao ponto O .

$z_C = -z_A = -2\sqrt{3} - 2\text{i}$

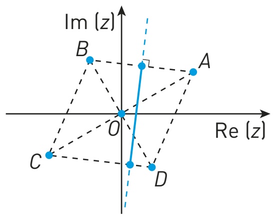
O número complexo z_D é o simétrico de z_B em relação ao ponto O .

$z_D = -z_B = -3\ \text{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\ \text{cis}\left(\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\ \text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) =$

$= 3\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}$

2. A condição $|z - z_A| = |z - z_B|$ representa, no plano complexo, a mediatriz de $[AB]$.

Assim, o conjunto dos afixos dos complexos z que fazem parte do losango e satisfazem a condição são todos os pontos comuns ao losango e à mediatriz do segmento de reta $[AB]$, tal como indica a figura seguinte.



Proposta 33

$r = |z_A| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

A reta que passa na origem e no ponto A é a bissetriz dos quadrantes pares e pode ser definida pela seguinte condição: $\text{Im}\,(z) = -\text{Re}\,(z) \Leftrightarrow \text{Im}\,(z) + \text{Re}\,(z) = 0$.

Então, o conjunto de pontos da região colorida, incluindo a fronteira, pode ser representado por:

$|z| \leqslant 2\sqrt{2} \wedge \text{Im}\,(z) + \text{Re}\,(z) \geqslant 0 \wedge \text{Re}\,(z) \leqslant 0$

A opção correta é a **(C)**.

Proposta 34

Os argumentos das cinco soluções da equação $z^5 = \text{i}$ estão em progressão aritmética de razão $\dfrac{2\pi}{5}$.

Assim sendo, a opção correta é a **(A)**, porque é a única onde a diferença dos argumentos é igual a $\dfrac{2\pi}{5}$.

Proposta 35

A condição $\arg\,(z) = \dfrac{\pi}{5}$ representa uma semirreta com origem em O e que forma com o semieixo real positivo um ângulo de amplitude $\dfrac{\pi}{5}$.

Os pontos que pertencem a essa semirreta têm abcissa e ordenada não negativas. Logo, excluem-se as condições apresentadas nas opções **(A)** e **(B)**.

A condição $\arg\,(z) = \dfrac{4\pi}{5}$ representa uma semirreta com origem em O e que forma com o semieixo real positivo um ângulo de amplitude $\dfrac{4\pi}{5}$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

Os pontos que pertencem a essa semirreta têm abcissa não positiva e ordenada não negativa. Logo, também se exclui a condição apresentada na opção **(D)**.

A opção correta é a **(C)**.

Pág. 233

Proposta 36

$r = |z_A| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Então, o conjunto de pontos da região colorida, incluindo a fronteira, pode ser representado por:

$|z - 3 + 2i| \leqslant \sqrt{13} \wedge \text{Im}(z) \geqslant -2 \wedge$

$\wedge |z| \geqslant |z - 3 + 2i| \wedge 2\,\text{Re}(z) + 3\,\text{Im}(z) \geqslant 0$

Proposta 37

1. Como o triângulo $[ABO]$ é equilátero e M é o ponto médio de $[AB]$, sabe-se que $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e $A\hat{O}M = \frac{\pi}{6}$.

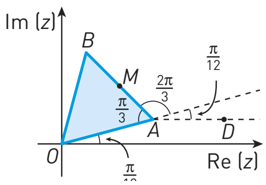
$\overline{OA} = |z_A| = 3$ e $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\overline{OM}}{2}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\overline{OM}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{OM}}{3} \Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow |z_M| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Então, $z_M = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cis}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

2.1.



Tal como é sugerido na figura, sendo a semirreta AD paralela ao eixo real, tem-se:

$D\hat{A}P = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$,

sendo P um ponto qualquer do lado $[AB]$.

Daqui se conclui que qualquer número complexo z cuja imagem geométrica pertença ao lado $[AB]$, satisfaz a condição:

$\arg(z - z_A) = \frac{3\pi}{4}$

2.2. Sendo $\arg(z_A) = \frac{\pi}{12}$, então $\arg(z_B) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$.

O triângulo $[OAB]$ pode ser representado pela seguinte condição:

$\frac{\pi}{12} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{5\pi}{12} \wedge \frac{3\pi}{4} \leqslant \arg(z - z_A) \leqslant \frac{13\pi}{12}$

Proposta 38

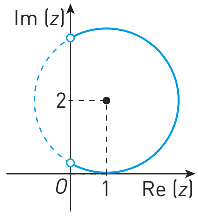
1. O segmento de reta $[AB]$ pode ser representado pela condição $\text{Im}(z) = 2 \wedge 1 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 4$

2. O segmento de reta $[AB]$ pode ser representado pela condição $\sqrt{2} \leqslant |z| \leqslant 3 \wedge \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

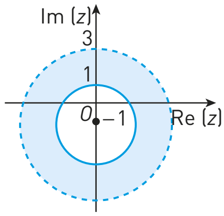
Pág. 234

Proposta 39

1. $|z - 1 - 2i| = 2 \wedge \text{Re}(z) > 0$



2. $|2i| \leqslant |z + i| < 4$

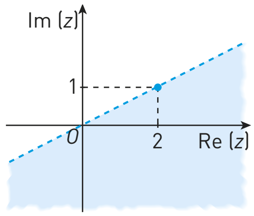


3. $\text{Re}(z + iz) > \text{Im}(z) \Leftrightarrow$

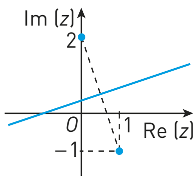
$\Leftrightarrow \text{Re}(x + yi + xi - y) > \text{Im}(x + yi)$

$\Leftrightarrow x - y > y$

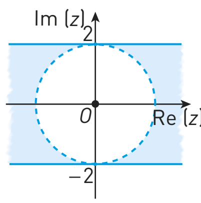
$\Leftrightarrow y < \frac{x}{2}$



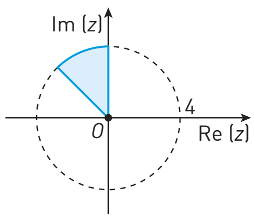
4. $|z - 1 + i| = |2i - z| \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z - 2i|$



5. $|z| > 2 \wedge |\text{Im}(z)| \leqslant 2$



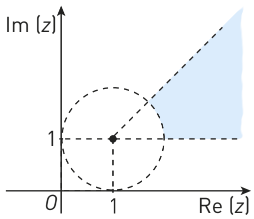
6. $|z| \leqslant 4 \wedge \frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{3\pi}{4}$



NEMA12CPR2 © Porto Editora

7. $|z-1-i|>1 \wedge 0<\arg(z-1-i)<\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow |z-(1+i)|>1 \wedge 0<\arg\left(z-(1+i)\right)<\frac{\pi}{4}$



Proposta 40

1. O raio da circunferência menor é 2 e o raio da circunferência maior é 4.

Assim, a região colorida pode ser definida pela condição:

$|z+2-4i| \leqslant |z-2-2i| \wedge 2 \leqslant |z-2-4i| \leqslant 4$

2. $w=\frac{i^{25}(1+4i)}{1+i}=\frac{i^{4\times 6+1}(1+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{i(1-i+4i+4)}{1+1}=$

$=\frac{5i-3}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$

Vamos verificar se a representação geométrica do complexo w pertence à zona colorida.

$|w+2-4i| \leqslant |w-2-2i| \wedge 2 \leqslant |w-2-4i| \leqslant 4$

$\Leftrightarrow \left|-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i+2-4i\right| \leqslant \left|-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i-2-2i\right| \wedge$

$\wedge\, 2 \leqslant \left|-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i-2-4i\right| \leqslant 4$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right| \leqslant \left|-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i\right| \wedge 2 \leqslant \left|-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i\right| \leqslant 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2} \leqslant \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \wedge$

$\wedge\, 2 \leqslant \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2} \leqslant 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{10}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{50}{4}} \wedge 2 \leqslant \sqrt{\frac{58}{4}} \leqslant 4$ (P. verdadeira)

Conclui-se, então, que a representação geométrica do complexo w pertence à zona colorida.

Proposta 41

1. O vértice B pertence à circunferência e ao semieixo real negativo, logo $z_B=-4=4\operatorname{cis}(\pi)$.

$z_C=4\operatorname{cis}\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=4\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)=4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=$

$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2-2\sqrt{3}i$

$z_A=4\operatorname{cis}\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=4\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=$

$=4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2+2\sqrt{3}i$

2. Então, o conjunto de pontos que constituem a região colorida, incluindo a fronteira, pode ser representado por:

$|z| \leqslant 4 \wedge \operatorname{Re}(z) \geqslant 2$.

Pág. 235

Proposta 42

1. $|z| \geqslant 1 \wedge |\operatorname{Re}(z)| \leqslant 3 \wedge |\operatorname{Im}(z)| \leqslant 3$

2. $|z-3-2i| \geqslant 2 \wedge 3 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 5 \wedge 2 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 4$

3. $\left[|z| \geqslant 2\sqrt{2} \wedge \frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{2}\right] \vee \left[|z| \leqslant 2\sqrt{2} \wedge \operatorname{Im}(z) \leqslant 0\right]$

4. $|z| \leqslant \sqrt{8} \wedge \frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{11\pi}{12}$

5. $2 \leqslant |z| \leqslant 3 \wedge -\frac{3\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{4}$

6. $\left[|z-3-4i| \geqslant 2 \wedge \frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z-1) \leqslant \frac{\pi}{2} \wedge \operatorname{Im}(z)<4\right] \vee$

$\vee \left[|z-3-4i| \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant \arg(z-1) \leqslant \frac{\pi}{4}\right]$

PARA AVALIAR 2

Parte 1 – Questões de escolha múltipla

Pág. 236

1. $w=\frac{1}{z}=\frac{1\operatorname{cis}0}{2\operatorname{cis}\left(-\frac{8\pi}{5}\right)}=\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(0+\frac{8\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

O argumento positivo mínimo de w é $\frac{8\pi}{5}$.

A opção correta é a **(B)**.

2. Se $z=\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{15\pi}{8}\right)$, então:

$z^4=\left[\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{15\pi}{8}\right)\right]^4=\left(\sqrt{3}\right)^4\operatorname{cis}\left(4\times\frac{15\pi}{8}\right)=9\operatorname{cis}\left(\frac{15\pi}{2}\right)=$

$=9\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=9(-i)=-9i$

A opção correta é a **(A)**.

3. Das condições dadas, conclui-se que:

$z_1=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ e $z_3=\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Se $|z_4-z_1|=\frac{4}{3}$, então $|z_4|=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$.

A opção correta é a **(C)** porque é a única opção onde está representado um número complexo cujo módulo é $\frac{1}{3}$.

4. Sejam z_A e z_B os números complexos cujas imagens geométricas são, respetivamente, os pontos A e B.

$|z_A|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$ e

$|z_B|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$.

Logo, a circunferência que passa em A tem raio 2 e a que passa em B tem raio 1.

A coroa circular é definida por $1 \leqslant |z| \leqslant 2$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora

$z_A = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$z_B = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{i} = \mathrm{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Então, a região sombreada, incluindo a fronteira, é definida por $1 \leqslant |z| \leqslant 2 \wedge -\frac{2\pi}{3} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Assim, a opção correta é a **(D)**.

5. $z = \mathrm{i}w = \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times 2\ \mathrm{cis}\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \frac{\pi}{12}\right) =$

$= 2\ \mathrm{cis}\left(\theta + \frac{5\pi}{12}\right)$

O número complexo z é um número real negativo se $\theta + \frac{5\pi}{12} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\theta + \frac{5\pi}{12} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, o valor de θ é $\frac{7\pi}{12}$.

A opção correta é a **(B)**.

Parte 2 – Questões de desenvolvimento

Pág. 237

1.1. $z = \frac{a - \mathrm{i}^{8n+1}}{1+\mathrm{i}} = \frac{a - (\mathrm{i}^4)^{2n} \times \mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(a - 1 \times \mathrm{i})\,(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i})} =$

$= \frac{a - a\mathrm{i} - \mathrm{i} - 1}{1+1} = \frac{a-1}{2} + \frac{-a-1}{2}\mathrm{i}$

O número complexo z é um imaginário puro se:

$\mathrm{Re}(z) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{2} = 0 \wedge \frac{-a-1}{2} \neq 0$

$\Leftrightarrow a = 1 \wedge a \neq -1 \Leftrightarrow a = 1$

O valor de a é 1.

1.2. A imagem geométrica de z, no plano complexo, pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$ se $|z| = \sqrt{5}$.

$|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a-1}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2 - 2a + 1}{4} + \frac{a^2 + 2a + 1}{4} = 5$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = -3 \vee a = 3$

Então, a imagem geométrica do número complexo z pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$ se e só se $a \in \{-3,\ 3\}$.

2.1. $z_6 = z_1 \times \mathrm{cis}\left(5 \times \frac{2\pi}{6}\right) = 2\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right) \times \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$= 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{21\pi}{12}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Como $2\ \mathrm{cis}\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right)$, tem-se:

$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$3n = 1 + 20 + 24k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{21 + 24k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

O menor valor natural de n obtém-se quando $k = 0$ e, nesse caso, $n = 7$.

2.2. $z_3 = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{12} + 2 \times \frac{2\pi}{6}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{9\pi}{12}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$

2.3. $z_5 = z_1 \times \mathrm{cis}\left(4 \times \frac{2\pi}{6}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right) \times \mathrm{cis}\left(\frac{8\pi}{6}\right) =$

$= 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{6}\right) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

3. $z^3 - \mathrm{i}z^2 + 2z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z^3 - \mathrm{i}z^2 + 2z - 2\mathrm{i} = 0$

Como i é uma das soluções da equação, aplicando a regra de Ruffini tem-se:

	1	$-\mathrm{i}$	2	$-2\mathrm{i}$
i		i	0	$2\mathrm{i}$
	1	0	2	0

$z^3 - \mathrm{i}z^2 + 2z - 2\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow (z - \mathrm{i})\,(z^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i} \vee z^2 = -2 \Leftrightarrow z = \mathrm{i} \vee z = \sqrt{2}\,\mathrm{i} \vee z = -\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

O produto das soluções da equação é:

$\mathrm{i} \times \sqrt{2}\,\mathrm{i} \times \left(-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right) = -2\mathrm{i}^3 = -2(-\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

4.1. $z_A = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

$\overrightarrow{OA} = \left(\sqrt{3},\ 1\right)$ e $\overrightarrow{OC} = \left(-3\sqrt{3},\ 2\right)$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$, ou seja,

$\overrightarrow{OB} = \left(-3\sqrt{3},\ 2\right) + \left(\sqrt{3},\ 1\right) = \left(-2\sqrt{3},\ 3\right)$.

$\rho = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{21}$

4.2. Sabe-se que $z = \rho\ \mathrm{cis}\,\theta$ e que $z = -2\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

Então, $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{3}{-2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

NEMA12CPR2 © Porto Editora