

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS RIBEIRO SANCHES (161214)

12º Ano

Matemática A

Teste de Avaliação (22 março 2017)

A ficha é constituída por dois grupos, Grupo I e Grupo II.

- ✍ O Grupo I inclui 5 questões de escolha múltipla.
- ✍ O Grupo II inclui 5 questões de resposta aberta.

GRUPO I

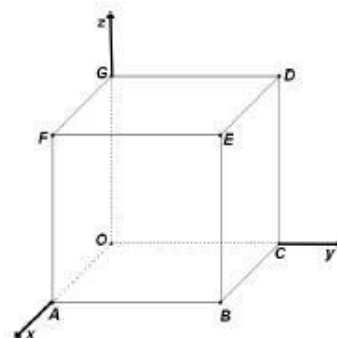
- ✍ As questões do Grupo I são de escolha múltipla.
- ✍ Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
- ✍ Escreva na sua folha de resposta a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
- ✍ Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- ✍ Não apresente cálculos.

1. Na figura, em referencial o. n. $Oxyz$, está representado um cubo.

Sabe-se que:

- a face $[OABC]$ está contida no plano xOy ;
- o ponto E tem coordenadas $(4, 4, 4)$;
- α é o plano mediador de $[ED]$.

Seja M o conjunto dos pontos de coordenadas inteiras que pertencem à interseção do plano α com o cubo.



Quantos pontos do conjunto M têm as coordenadas todas diferentes?

- (A) 5A_3 (B) 4C_2
(C) 5C_3 (D) 4A_2

2. Seja k um número real.

Sabe-se que $6^{k-1} = 2^k$.

Qual das seguintes expressões representa k ?

- (A) $1 + \log_3 2$ (B) $2 + \log_6 3$
(C) $1 - \log_2 6$ (D) $3 + \log_3 6$

3. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln(x-1)$.

Considera a sucessão (x_n) de termo geral $x_n = \frac{\sqrt{n}+n}{n}$.

Em relação a $\lim(f(x_n))$ podes concluir que é igual a:

- (A) 1 (B) $+\infty$
(C) 0 (D) $-\infty$

4. Seja k um número real diferente de zero.

Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{2x} = 3$.

Então, pode concluir-se que o domínio da função g definida por $g(x) = \ln(k-x)$ é:

- (A) $]0, \frac{2}{3}]$ (B) $] -\infty, 6[$
(C) $[3, +\infty[$ (D) $]\frac{3}{2}, +\infty[$

5. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, e seja g a função definida por $g(x) = f(x+1)$. A reta de equação $y = 2x + 4$ é a única assíntota do gráfico f . Qual das seguintes é uma equação da única assíntota do gráfico de g ?

- (A) $y = 2x + 6$ (B) $y = 2x + 4$ (C) $y = 2x - 4$ (D) $y = 2x - 6$

GRUPO II

✎ Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considera a função polinomial f definida por $f(x) = x^4 - 3x^2 - x + 2$.

1.1 Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $]0,1[$.

1.2 Seja x_0 o zero de f pertencente ao intervalo $]0,1[$ cuja existência foi provada na alínea anterior . Recorrendo à calculadora gráfica, dê exemplo de um intervalo do tipo $]a,b[$ que satisfaça simultaneamente as condições:

$$x_0 \in]a,b[$$

$$b - a < 10^{-2}$$

2. Considera a família de funções f de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} + k & \text{se } x \neq 0 \\ k + 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

2.1. Mostra que qualquer função da família é contínua.

2.2. Considera a função da família em que $k = 2$.

Determina, caso existam, as equações das assíntotas do gráfico de f .

3.

Seja a função definida por $f(x) = 2 + \ln x$. Mostre que o gráfico de f intersesta a bissetriz dos quadrantes ímpares num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]3,4[$.

4. Calcule:

4.1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^4}{\sqrt{x}}$

4.2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{\ln(x - 3)}$

4.3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^4 - 1}$$

5. Um paraquedista salta de um helicóptero a uma distância do solo de 1200 metros.

Sabe-se que a distância do paraquedista ao solo, t segundos após a abertura do paraquedas, é dada em metros, por:

$$d(t) = 540 - 5t + 20e^{-1,5t}$$

5.1. Determina a distância percorrida, em queda livre, pelo paraquedista até à abertura do paraquedas.

5.2. Quando o paraquedista se encontrava a 500 metros do solo, ligou uma câmara de filmar e desligou-a quando a distância ao solo era de 100 metros.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina a duração do vídeo, apresentando o resultado em minutos e segundos, sendo os segundos arredondados às unidades.

Na resposta deves reproduzir o gráfico ou gráficos das funções que tiveres de visualizar, indicando os pontos relevantes para a resolução do problema.

Formulário

Probabilidades

$$\mu = p_1x_1 + \dots + p_nx_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n(x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

FIM

Cotações											Totais
Grupo I	1.	2.	3.	4.	5.						
	8	8	8	8	8						40
Grupo II	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	
	10	20	15	15	20	15	15	15	15	20	160
											200